

# Los Haces como Espacios de Estado

**Nicolás Medina Sánchez**

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas  
Bogotá, Colombia  
Año 2019



# Los Haces como Espacios de Estado Físicos

**Nicolás Medina Sánchez**

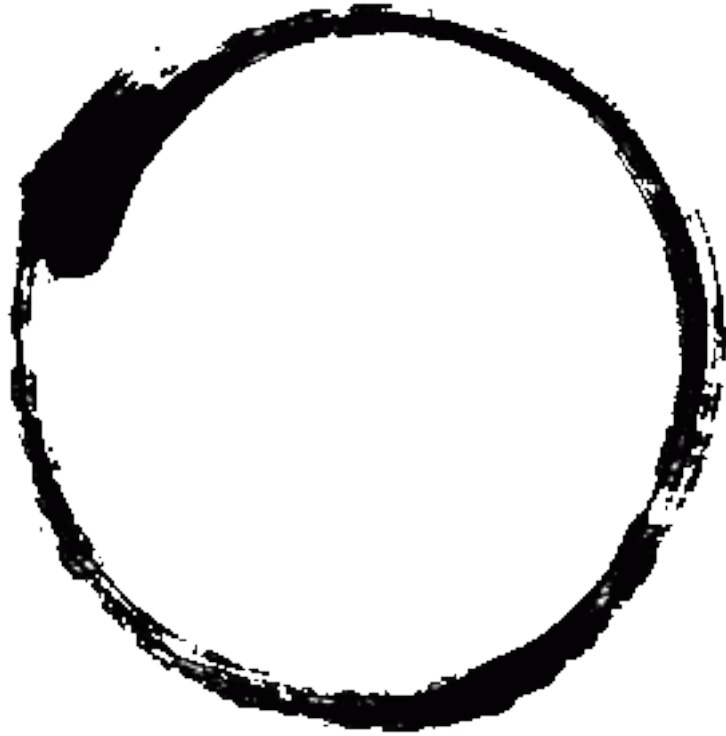
Esta tesis se presenta como requerimiento para obtener el grado:  
**Maestría en Ciencias - Matemática Aplicada**

Director:  
Ph.D. Andrés Villaveces Niño

Tema de Investigación:  
Física Matemática - Lógica Aplicada  
Grupo de Investigación:  
Geometría y Lógica

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de ciencias, Departamento de Matemáticas  
Bogotá, Colombia  
Año 2019





Si estás iluminado, todas las cosas son una y la misma,

Si no estás iluminado, todas las cosas son variadas y distintas.

Si no estás iluminado, todas las cosas son una y la misma,

Si estás iluminado, todas las cosas son variadas y distintas.

*Mumonkan, kōan XVI*



# **Agradecimientos**

A quienes han soportado mi peso y el peso que he decidido cargar: mi familia.





## Resumen

En la presente tesis se da un estudio del topos de prehaces que caracteriza la formulación en topos de la mecánica cuántica, utilizando una topología de Grothendieck definida sobre la categoría de contextos, base de los prehaces, a través de una métrica dependiente de un estado fijo a través del concepto de entropía. Con base a eso se estudian secciones del prehaz espectral utilizando la cohomología de prehaces, se introduce un concepto de curvatura para las secciones y finalmente se identifica el modelo genérico para una teoría cuyo topos clasificante es el topos de haces definidos sobre el sitio determinado por la categoría de contextos más la topología entrópica.

**Palabras Clave:** Entropía , Topos, Haces, Cohomología.

# Index

<b>Agradecimientos</b>	<b>VII</b>
<b>Resumen</b>	<b>IX</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Prehaces</b>	<b>4</b>
2.1. El Prehaz Espectral . . . . .	5
2.2. Realización Geométrica de $\mathcal{C}$ . . . . .	17
<b>3. Información</b>	<b>22</b>
3.1. Metrización y Lógica . . . . .	22
3.2. Variación Cuántica de la Información . . . . .	24
3.3. Topología Entrópica . . . . .	29
<b>4. Geometría</b>	<b>31</b>
4.1. El Complejo de Čech . . . . .	31
4.2. Kochen-Specker y Haces . . . . .	33
4.3. Obstrucciones . . . . .	37
4.4. Curvatura . . . . .	39
<b>5. Lógica de Haces</b>	<b>44</b>
5.1. Hacificación . . . . .	44
5.2. Topos Clasificante y Modelo Genérico . . . . .	47
<b>6. Conclusiones</b>	<b>49</b>
<b>A. Teoría de Topos</b>	<b>50</b>
<b>B. Información Cuántica</b>	<b>52</b>
<b>C. Cohomología de Čech</b>	<b>54</b>
<b>D. <math>SU(4)</math> y <math>SU(2) \otimes SU(2)</math></b>	<b>55</b>
<b>Bibliography</b>	<b>57</b>

# 1. Introducción

Las fronteras que aparecen entre las diferentes teorías activas de la física contemporánea están, esencialmente determinadas, por la forma en que las interacciones características de cada teoría transitan de un marco conceptual a otro. Estas interacciones, entendidas como correlaciones entre cantidades fundamentales del lenguaje de cada teoría, pueden incluso llegar a contradicciones cuando tratan de compararse sistemas físicos análogos en descripción, o sistemas híbridos dónde diferentes teorías tengan necesariamente que coexistir a través de una explicación consistente.

El problema podría ser que los objetos de las teorías y las correlaciones que implican sus sistemas de deducción internos se entienden *localmente*, en el sentido de que posibles teorías más generales y completas se construyen desde sistemas bien conocidos que se conducen (adecuadamente) a un punto de *incomodidad* entre las teorías. Esta aproximación, desde las teorías, no tiene en cuenta posibles panoramas globales al observar las teorías como miembros de un todo con cierta noción de *compatibilidad*.

La dificultad principal en esta empresa se encuentra en la carencia que existe de un lenguaje matemático, en el marco de la física, que permita generar fórmulas sobre estas visiones globales. Intentos han existido, principalmente a través de los diferentes mecanismos de cuantización y equivalencias entre estructuras matemáticas de naturaleza distinta, como la dualidad AdS/CFT, fundamental en la construcción de la teoría de cuerdas.

Sin embargo, este tipo de ejemplos (correspondencias, dualidades, etc.) se encuentran condensadas y estudiadas extensivamente en el marco de teorías matemáticas fundacionales como la teoría de categorías y la teoría de modelos. Es entonces natural pensar que las herramientas matemáticas necesarias para concebir espacios generales de diálogo entre los diferentes objetos conceptuales de la física, van a provenir precisamente de estos lugares.

Las ideas iniciales orientadas hacia este propósito han sido relativamente recientes, siendo de especial mención la reformulación en términos del lenguaje de topos del teorema de Kochen-Specker debido a C. Isham y J. Butterfield y la consecutiva realización del lenguaje de topos como un mecanismo para la construcción de nuevas teorías de la física.

Estas ideas están sustentadas sobre una colección de hipótesis sobre la idea de *espacio*

*de estado* para una teoría. Esta idea consiste en la presentación que tiene una teoría física de todas las manifestaciones posibles de cantidades físicas en virtud de las correlaciones que genera. Las teorías realistas, esto es, diferentes a la mecánica cuántica, definen espacios de estado a través de las *hipótesis de realismo*.

- El valor de una cantidad física en determinado tiempo es matemáticamente representable.
- Las proposiciones acerca de un sistema se manipulan utilizando lógica booleana.
- Los elementos del espacio de estado son tales que, especificar un estado para un sistema físico específico, conduce a una asignación precisa de valores de verdad para todas las proposiciones acerca del sistema.

En el marco de la mecánica cuántica, por otro lado, el espacio de estado no se puede describir partiendo de las anteriores premisas. Esta incompatibilidad enfrenta de manera determinante ambas teorías. Sin embargo, es posible generar un nuevo conjunto de hipótesis que se aproximen a las hipótesis de realismo en ciertas condiciones y en cualquier otro caso, respondan a las exigencias de la teoría cuántica. Estas hipótesis, precisamente, se escriben en el lenguaje de topos y constituyen la *hipótesis de neo-realismo*:

- En un topos  $\tau_\phi$  existen dos objetos específicos: el objeto "estado"  $\Sigma_\phi$  y el objeto "valor-de-medida"  $R_\phi$ . Toda cantidad física es entonces representada por un morfismo  $A_\phi : \Sigma_\phi \rightarrow R_\phi$ .
- Las proposiciones acerca de un sistema son representadas por los subobjetos del objeto estado  $\Sigma_\phi$ . Estos subobjetos forma un álgebra de Heyting.
- Los valores de verdad son asignados a las proposiciones utilizando un objeto "verdad".

Esta versión, en cierto sentido, debilitada del realismo, solamente condensa la idea de que a las estructuras que representan los espacios de estado físicos y la lógica que rige las proposiciones que refieren a los elementos de estos espacios, yace un formato común que integra naturalmente la *forma* del espacio con la *forma* de la lógica. Estos escenarios son precisamente los topos, dónde en mecánica clásica basta el topos de conjuntos **Set**, mientras que la mecánica cuántica exige un topos diferente que resulta ser el topos de prehaces **Set**<sup>C<sup>op</sup></sup> sobre una categoría  $\mathcal{C}$  de características particulares. Esta idea encarna el espíritu matemático de esta tesis.

El propósito del presente trabajo, entonces, es contribuir a esta idea, haciendo una presentación de los espacios de estado en el lenguaje de la teoría de topos y explorando ciertas características topológicas, geométricas y lógicas, que emergen en este tipo de descripción de los sistemas físicos.

De esta manera, en el capítulo **Prehaces** se construye la categoría de contextos, que es equivalente a la categoría de subálgebras conmutativas de algún álgebra que represente las mediciones posibles para un sistema físico. Después, se introduce el prehaz espectral, que genera el dual a cada subálgebra conmutativa, información necesaria para la descripción de todo sistema cuántico. Estos objetos en conjunto establecen el escenario de estudio central que es el topos de prehaces sobre la categoría de contextos. Las características y posibilidades geométricas de la categoría de contextos se comentan al final del capítulo.

Posteriormente, en el capítulo **Información** se introduce el rol de una métrica sobre la geometría definida para la categoría de contextos en el primer capítulo. Esta métrica puede inducir un operador lógico sobre el topos de prehaces y se comentan los elementos básicos de la lógica de topos. Finalmente, se construye la *topología entrópica*, que es una métrica particular relativa a un estado físico basada en teoría de la información y cuyo propósito es capturar la idea de reconstrucción de un estado *moviéndose* a lo largo de la categoría de contextos, es decir, a través de la composición inherente a la categoría.

La pregunta sobre la conexión entre información *clásica* y *cuántica* se aborda en el capítulo **Geometría**, donde se enuncia el teorema de Kochen-Specker en su versión geométrica, determinando que es la imposibilidad general de los prehaces de poseer secciones globales lo que tipifica su carácter cuántico. De esa manera, se establecen criterios cohomológicos para las obstrucciones a la globalidad de esas secciones. Esto permite determinar cómo es posible encontrar información clásica codificada en la forma de secciones extendibles, sobre los prehaces espectrales, y de paso, mostrando el trasfondo lógico que esto tiene al presentar una dualidad entre los elementos del dual espectral y el espacio de tipos para una teoría de representación del espacio de Hilbert. Además, se propone un estadio más de geometrización en la forma de una curvatura para las secciones.

Para terminar, en el capítulo **Lógica de Haces** se profundiza en la estructura lógica de las construcciones previas a través del mecanismo de hacificación, que se estudia en primera medida a través de sus consecuencias sobre las secciones de estados físicos y luego presentando una nueva lógica a través del topos de haces generado por la categoría de contextos y la topología entrópica. Este topos es el topos clasificante de una teoría y la lógica de haces generada, la lógica del modelo genérico de dicha teoría.

## 2. Prehaces

El objetivo de este capítulo es introducir el *escenario* de haces dentro del formalismo teórico de la mecánica cuántica. El objeto central de esta introducción es la construcción del denominado *(pre) haz espectral*  $\Sigma \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$ , introducido y estudiado esencialmente por C. Isham, J. Butterfield y A. Döring [19, 22], donde  $\mathcal{C}$  es la categoría que contiene la información sobre la estructura de eventos probabilísticos de la mecánica cuántica, de ahora en adelante, la *categoría de los contextos*. Esta estructura estará determinada básicamente por la  $C^*$ -álgebra de operadores, sus subálgebras, o de manera equivalente, a los subespacios cerrados de un espacio de Hilbert abstracto, asociados a un sistema cuántico general, mientras que el prehaz espectral asocia a cada subálgebra su respectivo espectro de Gel'fand.

Esta no es la única aproximación a la mecánica cuántica basada en haces categóricos. Existen formulaciones alternativas como por ejemplo el funtor *Bohrificación*  $\underline{A} \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C}}$  introducido por C. Heunen, B. Spitters y N. Landsmaan, igualmente basado en la categoría de contextos. La diferencia esencial radica en que el funtor Bohrificación explota resultados recientes [7] sobre el carácter *locálico* del espectro de Gel'fand asociado a una  $C^*$ -álgebra *interna* a un topos arbitrario, enfocándose entonces en su información topológica y no en los *puntos* que definen al espectro como espacio, dado que este último caso es excepcional, en el sentido que la descripción basada en puntos resulta solo ser posible en el topos de conjuntos  $\mathbf{Set}$ . El mecanismo en ese caso consiste en utilizar un funtor *trivial* en el topos de los prehaces covariantes, que envía cada subálgebra conmutativa en el conjunto de elementos que la componen. A esta operación es a lo que se denomina Bohrificación. El objetivo es representar una  $C^*$ -álgebra arbitraria a través del funtor Bohrificación en una  $C^*$ -álgebra interna al topos de prehaces covariantes y de esa manera asociarle un espectro de Gel'fand locálico. Esta perspectiva logra resultados semejantes a los que se consiguen utilizando el prehaz espectral, fundamentalmente en el sentido de encontrar la forma de representar proposiciones lógicas sobre sistemas físicos en espectros de Gel'fand, proceso que se denomina *daseinización*.

Sin embargo, en opinión del autor, a pesar de que la Bohrificación trabaja en un topos donde el álgebra, de manera natural, existe dentro del topos, la formulación basada en el prehaz espectral es más cercana a la manera en que se *razona* un sistema cuántico: los observables y los estados *en conjunto* contienen la información física. A pesar de que la  $C^*$ -álgebra no es un objeto del topos de prehaces contravariantes, la relación entre el álgebra y los estados sí lo es. Esto tiene ventajas tanto operativas como conceptuales. De esa manera es más fácil co-

nectar con preguntas concretas de la mecánica cuántica contemporánea (e.g. discriminación de estados, corrección cuántica de errores, criptografía, etc.). Por otra parte, no se desconoce el valor teórico del programa de Bohrificación que resulta ser equivalente o bastante similar en varios aspectos.

## 2.1. El Prehaz Espectral

**Definición 2.1.1.** *Un sistema físico  $S$  se define como una tripla  $(\mathcal{N}, \mathcal{O}, \mathcal{P})$  donde  $\mathcal{N}$  es el álgebra de observables (cantidades físicas medibles),  $\mathcal{O}$  la colección de los posibles valores que pueden tomar esas cantidades físicas luego de ser medidas y  $\mathcal{P}$  el espacio de las distribuciones de probabilidad que obedecen los elementos en  $\mathcal{O}$  (objetos intrínsecamente ligados con la noción de estado).*

En un sistema cuántico, el álgebra de observables es  $\mathcal{N} = \mathbb{B}(\mathbb{H})$ <sup>1</sup> Donde  $\mathbb{B}(\mathbb{H})$  es el álgebra de los operadores acotados que actúan sobre un espacio de Hilbert  $\mathbb{H}$ . Por otro lado, en mecánica clásica, los observables se identifican con el álgebra  $\mathcal{N} = \mathbb{C}(\mathbb{X})$  de las funciones con valores en los complejos, definidas sobre el espacio de fase  $\mathbb{X}^2$ .

En consecuencia, las cantidades físicas se entienden como transformaciones definidas sobre estructuras que almacenan la información física.

En el caso clásico, la información está contenida en los elementos de la  $\sigma$ -álgebra de Borel definida sobre el espacio de fase, mientras que en el escenario cuántico, es preciso introducir la noción de *contexto*.

**Definición 2.1.2.** *Un contexto  $V$  es una subálgebra conmutativa del álgebra de observables  $\mathbb{B}(\mathbb{H})$ . La colección de todos los contextos del álgebra  $\mathbb{B}(\mathbb{H})$  se denominará de ahora en adelante  $\mathcal{C}$ .*

Esta estructura admite un orden parcial  $\leq$ , definido a través de la contención de álgebras. Esto es, para  $P, Q \in \mathcal{C}$ :

$$P \leq Q \quad \leftrightarrow \quad P \subseteq Q$$

Además, si entendemos las inclusiones como morfismos de la forma

$$i_{PQ} : Q \hookrightarrow P$$

Esta colección de subálgebras conmutativas  $\mathcal{C}$  mas los morfismos anteriormente definidos, resulta ser la denominada *categoría de contextos*. Esta no es la única construcción posible

<sup>1</sup>Más exactamente, el álgebra de observables es  $\mathbb{B}_{sa}(\mathbb{H})$ , que es la región del álgebra total que corresponde a los operadores auto-adjuntos.

<sup>2</sup>En el sentido más general,  $\mathbb{X}$  debe ser una variedad simpléctica

para esta categoría. Alternativamente se podría trabajar con las subálgebras booleanas del retículo (en general) no distributivo de proyecciones sobre un espacio de Hilbert. Ambas visiones serán tenidas en cuenta a lo largo de esta tesis.

La razón de ser de estas construcciones radica en que familias de eventos donde a cada uno se le pueda asignar una probabilidad  $p \in \{0, 1\}$  simultáneamente, en el marco de la mecánica cuántica, solo pueden ser definidas sobre las regiones conmutativas del álgebra. Esto como consecuencia de que en el álgebra total pueden existir proposiciones incompatibles, en el sentido de que no se les puede asignar simultáneamente un valor de verdad booleano<sup>3</sup>. Esta es una forma de enunciar el fenómeno que se denomina *contextualidad*, que en un sentido más tradicional, dice que dada una *valuación* de un observable  $A$ , es decir, una representación de la medición de  $A^4$ , y un observable  $B = f(A)$ , se tiene que:

$$\text{val}(B) \neq f(\text{val}(A))$$

Por supuesto, si nos limitamos a contextos, la anterior condición sí se satisface. Es a lo largo de toda el álgebra general que las valuaciones no pueden cumplir la condición anterior simultáneamente, lo cual es el contenido del teorema de Kochen-Specker. Se centra entonces el análisis de las proposiciones solo a contextos, en el sentido de que solo en ellos es posible definir valuaciones. El interés de esto es preservar parcialmente lo que sucede en mecánica clásica, dónde para un observable  $f \in C(\mathbb{X})$ , los valores de verdad de las proposiciones atómicas  $[f \in \Delta]$  ('El observable  $f$  adquiere un valor dentro del conjunto de Borel  $\Delta$ ') se asignan a través de una función característica que identifica sobre qué regiones del espacio de fase  $\mathbb{X}$ , el observable  $f$  adquiere un valor en  $\Delta$ . Para el caso cuántico, las proposiciones atómicas serán representadas por los operadores proyectivos dentro del álgebra, y el análogo de la función característica serán los elementos del espectro de Gel'fand asociado a cada contexto.

En ese sentido y teniendo en cuenta que cada contexto es una  $C^*$ -álgebra, es preciso introducir la siguiente definición.

**Definición 2.1.3.** *El espacio de Gel'fand  $\Sigma(X)$  de una  $C^*$ -álgebra  $X$  es un espacio topológico, compacto y de Hausdorff, compuesto por todos los  $*$ -homomorfismos continuos y positivos  $\omega : X \rightarrow \mathbb{C}$  de norma 1  $\|\omega\| = 1$ .*

<sup>3</sup>En el formalismo tradicional de la mecánica cuántica esto es manifestación de la imposibilidad que existe de diagonalizar simultáneamente operadores que no conmuten. En ese sentido, no se les puede asignar autovalores utilizando la misma base de diagonalización y como consecuencia solo se puede tener información parcial de ambos.

<sup>4</sup>Una valuación es una función  $\text{val} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{O}$  con  $\text{val}(A) = \lambda$ , dónde  $\lambda$  es un posible valor de medida para  $A$ , que cuánticamente corresponde a un elemento del espectro de  $A$ .



La asignación de espacios de Gel'fand a  $C^*$ -álgebras se puede representar a través de un funtor  $\Sigma$  (el espectro de Gel'fand) con dominio en la categoría de las  $C^*$ -álgebras y codominio la categoría de los espacios topológicos tipo Hausdorff.

En el lenguaje tradicional de la mecánica cuántica, este espacio está constituido por todos los funcionales lineales sobre un contexto  $V$ , que dada la condición sobre la norma, y la positividad  $\omega(O^\dagger O) \geq 0$  para todo  $O \in V$ , es posible interpretar como *estados* para el sistema. Esto proviene del hecho de que típicamente, el valor esperado de un observable para un estado, es un elemento del espacio de Gel'fand asociado a alguna región conmutativa a la que pertenezca el observable.

$$\omega_\Psi(A) = \langle \Psi | \hat{A} | \Psi \rangle$$

Donde  $\Psi$ , en este caso es un estado puro <sup>5</sup>.

**Definición 2.1.4.** Para cada observable  $X \in V$ , con  $V$  un contexto, se define  $\tilde{X} : \Sigma(V) \rightarrow \mathbb{C}$  en la forma  $\tilde{X}(\phi) = \phi(X)$ . De esta manera,  $\tilde{X}$  es una función continua denominada la transformada de Gel'fand de  $X$ .

Podemos ver cómo el espacio de Gel'fand es análogo al espacio de estado clásico, para la mecánica cuántica, en el sentido de que la transformada de Gel'fand de los operadores actúa sobre el espacio de Gel'fand asociado al contexto al cual pertenece  $X$ , de manera semejante a como lo hacen los observables clásicos, en tanto funciones continuas, definidas sobre regiones medibles del espacio de fase clásico.

De esta manera, es posible asegurar que la información física está contenida en el espacio de Gel'fand para el caso de la mecánica cuántica, así como lo está en el espacio de fase para la mecánica clásica.

Además, el rol de la función característica que determina valores de verdad para las proposiciones, será entonces desarrollado por un clasificador de estados que determine para cuáles estados un valor esperado tiene un determinado valor específico. Estas colecciones de estados puros forman conjuntos clopen en la topología del espacio de Gel'fand y cada uno de estos clopen es imagen de un proyector<sup>6</sup> dentro del contexto, dado que existe un isomorfismo [18]

$$\alpha : \mathcal{P}(V) \rightarrow \text{Sub}_{\text{cl}} \Sigma_V$$

<sup>5</sup> Para que sea elemento del espacio de Gel'fand, este estado debe representar un autoestado del observable, de otra manera no se puede garantizar que sea un  $*$ -homomorfismo

$$\langle \Psi | \hat{A} | \Psi \rangle = (\langle \Psi | \hat{A}^\dagger | \Psi \rangle)^*$$

For  $\hat{A} \in X$ .

<sup>6</sup> Si  $P \in B(H)$  satisface que  $P^2 = P$ , entonces se le denomina un *proyector*

Entre el conjunto de proyectores  $\mathcal{P}(V)$  y la familia de subconjuntos clopen  $\text{Sub}_{\text{cl}}\Sigma_V$  del espectro de Gel'fand  $\Sigma_V$  del contexto  $V$  (teorema 3.2 [16]). Esto finalmente nos indica que el análogo de la función característica, es decir, el identificador de eventos en mecánica cuántica, son los proyectores del álgebra. Además, presenta una conexión esencial entre la visión de la categoría de contextos basada en subálgebras de von Neumann y la visión basada en subálgebras abelianas del álgebra general de proyectores  $\mathcal{P}$ .

Estos proyectores, además, tienen como imagen subespacios cerrados del espacio de Hilbert. En ese sentido, para que podamos incluir una medida de probabilidad sobre la ocurrencia de eventos, es entonces preciso hablar de medidas de probabilidad definidas sobre espacios de Hilbert. Para esto, el siguiente teorema es fundamental.

*Teorema:(Gleason)* Para un espacio de Hilbert  $H$  tal que la dimensión real del espacio sea  $\dim(H) \geq 3$ , todas las medidas de probabilidad  $\mu$  posibles para un subespacio  $a$  de  $H$  tienen la forma  $\mu(a) = \text{Tr}(\rho P_a)$  donde  $\rho$  es un operador auto-adjunto y positivo semidefinido con traza  $\text{Tr}(\rho) = 1$  y el evento  $a$  está caracterizado por su respectivo proyector  $P_a$ . [33]

En este sentido, se tiene una imagen completa de la definición inicial de sistema físico y en particular, de los eventos en mecánica cuántica, entendidos como configuraciones del sistema que asignan valores de verdad a proposiciones acerca del sistema, con una probabilidad determinada. Además, se ve cómo los elementos del espectro de Gel'fand, en tanto estados, pueden verse dualmente como funcionales o como operadores como los descritos en la enunciación del teorema. De otra manera:

$$\omega_\rho \leftrightarrow \rho_\omega$$

Los operadores densidad  $\rho$  representan el estado físico del sistema, y en ese sentido, la probabilidad de que ocurra un evento queda enteramente caracterizada por el estado del sistema en un instante determinado. Si, por ejemplo, sucede que el estado del sistema sea tal que un evento ocurra con máxima probabilidad, eso significa que:

$$\text{Tr}(\rho P_a) \in \{0, 1\}$$

Una expresión de probabilidad 1 o 0 para un proyector, indica que  $\rho$  pertenece al espectro de Gel'fand del contexto al cual pertenece  $P_a$ . En cualquier otro caso, los valores de probabilidad estarán distribuidos en el intervalo  $[0, 1]$ . Esto se puede ver también de la definición misma de elemento del espacio de Gel'fand. Si  $P \in X$  un proyector para  $X$  una  $C^*$ -álgebra y  $\lambda \in \Sigma_X$ :

$$\lambda(\hat{P}) = \lambda(\hat{P}^2) = \lambda(\hat{P})^2 \in \{0, 1\}$$

Como eventos, los proyectores identifican *el dominio* de proposiciones de la forma ' $A \in \Delta$ ' ('la medición  $A$  adquiere un valor en el conjunto de Borel  $\Delta$ '). Esto en el sentido de que cada

observable  $A$  tiene una familia de proyectores asociada; uno para cada autovalor del operador y de esa manera, cada resultado posible de una medición corresponde a un subespacio específico, con una probabilidad definida por el estado del sistema. Es decir, en contraste con la teoría clásica, dónde cada proposición  $\phi_c(A)$  sobre un observable  $A$  tiene asociada una función característica  $\chi_{\phi(A)}$  independiente del estado del sistema<sup>7</sup>, cada proposición cuántica  $\phi_q(A)$  tiene asociado un proyector  $P_{\phi(A)}^\rho$ , dependiente del estado  $\rho$ . En ese sentido es importante notar cómo la proposición no corresponde solo a la caracterización de una región del espacio de fase, o a un subespacio de un espacio de Hilbert solamente sino que tiene en cuenta el estado que tiene el sistema. Esta visión *relacional* de las proposiciones está en el corazón de la formulación que se está construyendo y además es una consecuencia directa del esquema de topos que sostiene de manera esencial la propuesta

Existe además la posibilidad de que un autovalor esté asociado a varios proyectores y en tal escenario se dirá que el observable es degenerado. En ese sentido, algunos contextos pueden ser diagonalizados mediante familias degeneradas de proyectores e.g.  $\{P_1 + P_2, P_3, \dots\}$ . Entonces, se ve que la acción de un elemento del espacio de Gel'fand  $\omega \in \Sigma_X$  sobre los proyectores dentro del contexto  $X$  es precisamente el de asignarles valores de verdad, en tanto proposiciones. Es interesante hacer énfasis en cómo esta asignación de verdad solo es posible de construir relativa a contextos, o *localmente*. Es decir, verdades globales sobre el álgebra no pueden construirse generalmente, solo de manera relativa a las regiones conmutativas del álgebra de observables. Esta es otra forma de enunciar el teorema de Kochen-Specker que será esencial en el capítulo siguiente.

Con base a lo anterior recapitulamos: el análogo a los eventos en mecánica clásica (conjuntos) son los subespacios cerrados de un espacio de Hilbert, donde el rol de la función característica que determina en qué regiones se obtienen determinados valores para los observables será desempeñado por los elementos del espacios de Gel'fand y los proyectores de cada contexto, en conjunto. Es decir, mientras en mecánica clásica para un observable  $f \in C(\mathbb{X})$ <sup>8</sup> los posibles valores de medida  $f(x) = \gamma$  determinan una partición del espacio de fase  $\mathbb{X}$  caracterizada por el conjunto  $\{P_\gamma\}$  (con  $P_\lambda$  funciones características disjuntas entre sí), en mecánica cuántica, cada observable, en tanto operador  $A \in B(\mathbb{H})$ , define una familia de proyectores  $\{P_\gamma\}$  en subespacios del espacio de Hilbert  $\mathbb{H}$ , cada uno asociado a un autovalor  $\gamma$  de  $A$ , y cuyo peso probabilístico dependerá del estado  $\rho$  del sistema.

<sup>7</sup>Es decir, la región en la que una función sobre el espacio de fase adquiere un valor determinado no depende del estado que tiene el sistema.

<sup>8</sup>Los observables en mecánica clásica son funciones con imagen en los complejos y dominio el espacio de fase  $\mathbb{X}$ .

En ambos casos, cabe notar que los elementos  $P_\gamma$  satisfacen las identidades:

$$\sum_{\gamma} P_{\gamma} = 1, \quad P_{\gamma} P_{\beta} = P_{\gamma} \delta_{\gamma\beta}$$

Con  $\delta_{\gamma\beta}$  la delta de Kronecker. Es importante notar cómo es el comportamiento de las medidas de probabilidad, respecto a la acción de los proyectores, es decir, la construcción de las distribuciones marginales. En mecánica clásica, una distribución  $\rho$  sobre el espacio de fase proyecta en la forma:

$$\rho \rightarrow \frac{1}{p_{\lambda}} P_{\lambda} \rho = \rho_{\lambda}$$

Dónde  $p_{\lambda}$  es la probabilidad de que el evento caracterizado por  $P_{\lambda}$  ocurra<sup>9</sup>. Esto no es otra cosa que la regla de Bayes para distribuciones de probabilidad. Por otro lado, en el caso cuántico, para un operador densidad  $\rho$ , tenemos la regla de von Neumann-Lüders:

$$\rho \rightarrow \frac{1}{p_{\lambda}} P_{\lambda} \rho P_{\lambda} = \rho_{\lambda}$$

El contraste esencial entre ambas reglas de proyección es básicamente que el escenario clásico es reversible, mientras el cuántico no. En términos de la escritura a través del pre-haz espectral, la marginalización en el caso cuántico corresponde a la caracterización de un subprehaz del prehaz espectral actuando sobre un contexto específico, acción en la cual se pierde información. Es decir, la distribución clásica puede reconstruirse fielmente con base a sus proyecciones:

$$\rho = \sum_{\lambda} p_{\lambda} \rho_{\lambda}$$

Mientras que para la mecánica cuántica:

$$\rho \neq \sum_{\lambda} p_{\lambda} \rho_{\lambda} = \mathcal{M} \rho$$

Este fenómeno de *irreversibilidad* respecto a las proyecciones es esencial en la teoría cuántica y está fuertemente ligado con el mecanismo de *decoherencia*. El operador  $\mathcal{M}$  es relativo a contextos específicos, es decir, la acción de este es marginalizar el estado general a un contexto de medida, o lo que es lo mismo, familia de observables conmutantes. La conclusión de esto es que no es posible reconstruir, en general, el estado de un sistema cuántico, o toda la información contenida en él, observando su comportamiento marginal. Todo esto se verá más claro en la medida que se profundice en la naturaleza topos-teórica de los espacios de estado.

Por otra parte, es necesario discutir más a fondo la forma que tiene el espacio de Gel'fand. Como se mencionó previamente, este es un espacio topológico en el sentido de que posee una topología (la más débil) que hace continua la acción de la transformada de Gel'fand de los

---

<sup>9</sup> $p_{\lambda} = \int P_{\lambda} \rho dx$

operadores  $X \in V$ , sobre los funcionales  $\Sigma(V) \rightarrow \mathbb{C} :: \phi \mapsto \hat{X}(\phi) = \phi(X)$ . A esta topología usualmente se le denomina espectral o de Gel'fand. Específicamente cada vecindad de un elemento  $\phi_0$  puede escribirse en la forma:

$$U(\phi_0, x_1, \dots, x_n, \epsilon) = \{\phi \in \Sigma(V) : |\phi(x_i) - \phi_0(x_i)| < \epsilon, 1 \leq i \leq n\}$$

Dónde  $\epsilon > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$  y  $x_1, \dots, x_n \in V$ . Este espacio respecto a esta topología es compacto, de Hausdorff y usualmente no-conexo. Como se discutió antes, la familia de proyectores en cada contexto es isomorfa a una base de esta topología. Estos elementos forman un retículo con la contención como orden parcial. De esa forma, los proyectores heredan un orden:

$$P \leq Q \leftrightarrow \text{Ran}(P) \subseteq \text{Ran}(Q)$$

Donde  $\text{Ran}(P)$  es el rango del proyector, en otras palabras, un subespacio cerrado del espacio de Hilbert  $\mathbb{H}$ . Luego contención de subespacios se traduce en contención de clopen en el espectro de Gel'fand. Cabe notar que este orden es equivalente al orden parcial que existe entre operadores autoadjuntos:

$$P \leq_{sa} Q \leftrightarrow Q - P \text{ es un operador positivo}$$

Ambos retículos, en tanto isomorfos, son completos, distributivos y ortocomplementados. Específicamente, la acción del isomorfismo mencionado es la siguiente:

$$\alpha(P) = \{\lambda \in \Sigma(V) | \lambda(P) = 1\}$$

Esta construcción recuerda las bases para *espacios de Stone* asociados a álgebras Booleanas, como es el caso del retículo de proyectores dentro de un contexto. Observando la acción general del prehaz espectral sobre este retículo, se concluye que la imagen de este ante la acción del prehaz espectral, es su correspondiente espacio de Stone, el cuál es característico de cada contexto.

Como functor, el espectro de Gel'fand de la siguiente manera ante las inclusiones en la categoría de contextos  $\mathcal{C}$ :

$$\Sigma(i_{V'V}) : \Sigma(V) \rightarrow \Sigma(V)' :: \lambda \mapsto \lambda|_{V'}$$

La manera en que los elementos del espacio de Gel'fand se restringen a contextos menores en el orden, se hace utilizando la regla de proyección para distribuciones cuánticas mencionada anteriormente, teniendo en cuenta que los funcionales que pertenecen al espacio de Gel'fand son representables a través de trazas realizadas utilizando matrices densidad. En ese sentido se puede restringir un funcional proyectando la matriz densidad asociada a dicho funcional sobre un contexto menor. Por ejemplo, un funcional  $\omega_V(A) = \text{Tr}(\rho_V A)$ <sup>10</sup> tal que  $V, W \in \mathcal{C}$

<sup>10</sup> $\omega_{\rho_V} = \omega_\rho$ , por conveniencia en la notación.

y  $W \leq V$ , se restringe al contexto  $W$  utilizando el operador de marginalización a contextos  $\mathcal{M}_W \rho = \sum_{\lambda} p_{\lambda} \rho_{\lambda}$  con  $P_{\lambda} \in W$  se tiene que:

$$\omega_V|_W(A) = \text{Tr}(\mathcal{M}_W \rho_V A) = \text{Tr}\left(\sum_{\lambda} P_{\lambda} \rho_V P_{\lambda} A\right) = \sum_{\lambda} \text{Tr}(P_{\lambda} \rho_V A)$$

Donde se usó en el último término el hecho de que la traza es lineal y cíclica.

La colección formada por todos los prehaces contravariantes con dominio en una categoría constituye una categoría, con las transformaciones naturales como morfismos. Esta categoría constituye un topos [29]. En ese sentido, el prehaz espectral es un elemento del topos  $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$ . El topos de prehaces tiene como clasificador de subobjetos  $\Omega$  el funtor que envía cada elemento  $U$  de la categoría base en el conjunto de todos los morfismos  $f$  tales que  $\text{Cod}(f) = U$ . En el caso particular de la categoría de contextos, el clasificador de subobjetos es entonces el funtor que a cada contexto le asigna el conjunto de todos sus subcontextos. En términos del orden intrínseco de la categoría, se tiene luego que  $\Omega \cong \mathcal{D}(\mathcal{C})$ , donde  $\mathcal{D}(\mathcal{C})$  es la colección de todas las secciones iniciales (*down-sets*) en la categoría  $\mathcal{C}$ . En este sentido la acción del clasificador sobre un contexto  $V$  es  $\Omega(V) = \mathcal{D}(\downarrow V)$ , donde  $\downarrow V$  es el conjunto de todos los subcontextos de  $V$  o, dicho de otra manera, es la sección inicial generada por  $V$ . Sobre morfismos,  $\Omega(V \leq W) : \Omega(W) \rightarrow \Omega(V)$  que actúa sobre un recubrimiento arbitrario de  $W$  en la forma  $\Omega(V \leq W)(S) = \downarrow V \cap S$ .

Además, se tiene la acción del objeto terminal del topos  $\mathbf{1} : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Sets} :: V \mapsto \{*\}$  que a cada contexto le asigna un singleton. Con base a esto, es posible, entonces, definir la transformación natural  $\top$  sobre un contexto específico  $V$ , en la siguiente forma:

$$\top_V : \mathbf{1}(V) = \{*\} \rightarrow \Omega(V)$$

Cuya acción es la de tomar la sección inicial maximal sobre el contexto  $V$ , es decir:

$$\top_V(*) = \downarrow V$$

Esta transformación es esencial, en conjunto con el clasificador de subobjetos, para la definición *elemental* de topos. En abstracto, se necesita que el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & \mathbf{1} \\ \downarrow m & & \downarrow true \\ B & \xrightarrow{\phi} & \Omega \end{array}$$

Sea conmutativo a través de un *único*  $\phi$ , donde  $S, B$  son elementos del topos y  $m$  un morfismo mónico entre ellos. Dado que ya conocemos el morfismo  $\top$ , podemos definir el mapeo característico  $\phi = \text{char}(m)$  (también llamado mapa clasificador) encargado de caracterizar los subobjetos dentro del topos. Para el caso del topos de prehaces contravariantes,

un subprehaz  $m : M \rightarrow N$  de un prehaz  $N$ , queda enteramente determinado en la forma  $char_m : N \rightarrow \Omega$ , definida a través de la acción sobre un contexto  $U$  como:

$$char_{j,U} : N(U) \rightarrow \Omega(U)$$

Que actúa sobre los elementos del prehaz como:

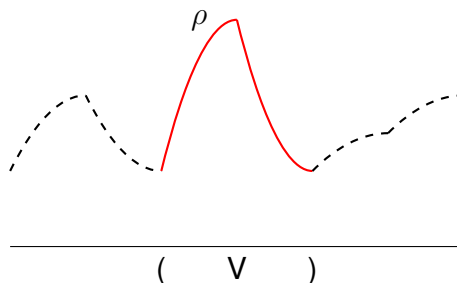
$$char_{j,U}(P) = \{g \mid g: B \rightarrow U, (Ng)(P) \in M(B)\}$$

Esta definición se extiende para todos los elementos del topos de interés, es decir, para todos los prehaces definidos sobre la categoría de contextos. Sin embargo, podemos ver un ejemplo de particular interés, que es la acción de este mapa característico para identificar un subprehaz  $\Sigma'$  del prehaz espectral  $\Sigma$ , donde existe un mapeo inyectivo (mónico)  $j : \Sigma' \rightarrow \Sigma$ , para un estado  $\rho \in \Sigma(U)$  en el espectro de Gel'fand sobre el contexto  $U$ :

$$char_{j,U}(\rho) = \{V \leq U \mid \rho|_V \in \Sigma(V)\}$$

Es decir, el mapa  $char$  identifica todos los subcontextos sobre los cuales una restricción del estado  $\rho$ , pertenece a su espectro de Gel'fand. En el caso clásico, el topos es **Set**, dónde el clasificador de subobjetos es simplemente  $\Omega = \{0, 1\}$ . En ese caso, el mapa  $char$  es la función característica conjuntista. En ese sentido se hace clara la proyección a subestados (llamada aquí marginalización) en ambos escenarios: mientras en mecánica clásica la restricción se reduce a caracterizar un subconjunto, en mecánica cuántica corresponde a la caracterización de un subprehaz. Al hacer la restricción en el sentido clásico, basta con delimitar el dominio del estado, con lo cual se sabe perfectamente cuál es la información que se está dejando de lado, pero en la mecánica cuántica cada contexto tiene su familia de estados asociada, la cual no se puede reconstruir con base a subcontextos, de manera que al hacer la proyección de un estado arbitrario a contextos más pequeños, puede ocurrir que se pierda información en la descomposición.

Esto está fuertemente ligado a la propiedad que tenga un estado particular de ser *extendible*, en el sentido de que dicho estado pertenezca a una familia de estados en diferentes contextos, menores y mayores a lo largo de la categoría  $\mathbb{C}$ , tales que es posible reconstruirlos todos conociendo sus proyecciones a contextos menores. En el caso clásico, todos los estados son extendibles, en el sentido de que siempre habrá para un estado arbitrario, familias de funciones definidas sobre diferentes dominios que sean compatibles y de las cuales el estado haga parte.



La parte roja representa un elemento en el espectro del contexto  $V$ . La línea punteada denota la *extendibilidad* del elemento a lo largo de otros contextos.

**Ejemplo:**  $\mathbb{H} \simeq \mathbb{C}^4$

Este ejemplo consiste en el espacio de Hilbert característico del escenario de comunicación más sencillo que existe a nivel cuántico. Esto es, una pareja de agentes que comparten un sistema de 2 qubits. Este sistema puede tener estados, como es sabido, factorizables, o por el contrario, entrelazados. De esta manera, este escenario es uno de los sistemas más sencillos en los que se hace manifiesto un comportamiento esencialmente cuántico.

Los operadores que actúan sobre este espacio de Hilbert son representables mediante matrices  $4 \times 4$  con entradas en los complejos. Estas matrices conforman un álgebra de von Neumann  $M_4(\mathbb{C})$  para la cual existe una representación de la base en la forma  $\sigma_\mu \otimes \sigma_\nu$  ( $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ ), con  $\sigma_0 = \mathbf{1}_2$  y  $\sigma_\mu$  las matrices de Pauli.

Se restringe el estudio a la subálgebra  $\mathcal{I} \subset M_4(\mathbb{C})$  de matrices invertibles. Esta subálgebra coincide con el grupo de Lie  $\mathcal{I} = \text{GL}(4, \mathbb{C})$ , que tiene como álgebra de generadores, el álgebra de Lie  $\mathfrak{gl}(4, \mathbb{C})$ . De esta manera, se pueden utilizar las herramientas de los grupos de Lie, para la caracterización de las subálgebras. Más allá, dentro de  $\text{GL}(4, \mathbb{C})$  hay subgrupos interesantes físicamente como  $\text{SU}(4)$  y  $\text{SU}(2) \otimes \text{SU}(2)$ . De esta manera, dado que  $\text{SU}(2) \otimes \text{SU}(2) \subset \text{SU}(4)$ , el ejemplo se va a limitar finalmente al estudio de  $\text{SU}(4)$ , grupo que tiene como álgebra de generadores:

$$\mathfrak{su}(4) = \{X \in \mathfrak{gl}(4, \mathbb{C}) \mid X^\dagger = -X, \text{Tr}(X) = 0\}$$

Para esta álgebra de Lie se tiene un total de 15 generadores, que representados en la base canónica, se considerarán como la familia de matrices  $\{\lambda_i\}_{i=1}^{15}$ <sup>11</sup> (ver Apéndice D), con las cuales además pueden determinarse los 9 elementos que representan los generadores de  $\text{SU}(2) \otimes \text{SU}(2)$ .

Si la subálgebra conmutativa es maximal, entonces se le conoce como *subálgebra de Cartan* y al grupo de Lie generado se le denomina *toroide maximal*, el cual es un subgrupo Abeliano maximal [35]. Estos últimos serán los interesantes para la construcción. Dado que para un álgebra de Lie  $\mathfrak{su}(N)$  la dimensión de las subálgebras de Cartan (también llamado el rango del álgebra) es  $\text{rank}(\mathfrak{su}(N)) = N - 1$ , de manera que para  $N = 4$ , las subálgebras de Cartan estarán generadas a lo sumo por 3 elementos en la base del álgebra. Hay que tener en cuenta que los elementos del álgebra pueden verse también como operadores sobre el espacio de Hilbert, teniendo a los operadores  $\hat{\lambda}_i$  como generadores asociados a las matrices  $\lambda_i$  (i.e. satisfaciendo la mismas operaciones): Utilizando este hecho, se escribe la siguiente

<sup>11</sup>Para  $\mathfrak{su}(N)$  la base del álgebra tiene  $N - 1$  elementos.



familia de operadores en  $\mathfrak{su}(4)$ :

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{\pm} &= \frac{1}{2}(\hat{\lambda}_1 \pm i\hat{\lambda}_2), & \mathbf{T}_3 &= \frac{1}{2}\hat{\lambda}_3 \\
\mathbf{U}_{\pm} &= \frac{1}{2}(\hat{\lambda}_6 \pm i\hat{\lambda}_7), & \mathbf{U}_3 &= \frac{1}{4}(-\hat{\lambda}_3 + \sqrt{3}\hat{\lambda}_8) \\
\mathbf{V}_{\pm} &= \frac{1}{2}(\hat{\lambda}_4 \pm i\hat{\lambda}_5), & \mathbf{V}_3 &= \frac{1}{4}(\hat{\lambda}_3 + \sqrt{3}\hat{\lambda}_8) \\
\mathbf{W}_{\pm} &= \frac{1}{2}(\hat{\lambda}_9 \pm i\hat{\lambda}_{10}), & \mathbf{W}_3 &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\hat{\lambda}_3 + \frac{1}{2\sqrt{3}}\hat{\lambda}_8 + \sqrt{\frac{2}{3}}\hat{\lambda}_{15}\right) \\
\mathbf{X}_{\pm} &= \frac{1}{2}(\hat{\lambda}_{11} \pm i\hat{\lambda}_{12}), & \mathbf{X}_3 &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\hat{\lambda}_3 + \frac{1}{2\sqrt{3}}\hat{\lambda}_8 + \sqrt{\frac{2}{3}}\hat{\lambda}_{15}\right) \\
\mathbf{Z}_{\pm} &= \frac{1}{2}(\hat{\lambda}_{13} \pm i\hat{\lambda}_{14}), & \mathbf{Z}_3 &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}\hat{\lambda}_8 + \sqrt{\frac{2}{3}}\hat{\lambda}_{15}\right)
\end{aligned}$$

Cada terna de operadores asociada a cada letra configura un álgebra de Lie propia para  $\mathfrak{su}(4)$ . Los operadores indizados con  $\pm$  son los llamados *operadores escalera* de cada subálgebra y el tercer operador es el que se escoge diagonal<sup>12</sup>, de manera que sus autoestados serán los estados del álgebra. Se tiene además que  $\lambda_3$ ,  $\lambda_8$  y  $\lambda_{15}$  son diagonales en la base canónica, y dado que los operadores  $\hat{\lambda}_i$  se han escogido obedeciendo las mismas relaciones, trivialmente los operadores  $\mathbf{T}_3$ ,  $\mathbf{U}_3$ ,  $\mathbf{V}_3$ ,  $\mathbf{W}_3$ ,  $\mathbf{X}_3$ ,  $\mathbf{Z}_3$  conmutan. Esto no entra en conflicto con el hecho de que las subálgebras de Cartan tengan dimensión 3, dado que estos operadores no son linealmente independientes y así mismo se preserva el hecho de que el álgebra en general solo tiene 15 generadores.

Ahora, al calcular los conmutadores entre todos estos elementos, se encuentra que:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{T}_i, \mathbf{Z}_j] &= [\mathbf{U}_i, \mathbf{W}_j] = [\mathbf{V}_i, \mathbf{X}_j] = 0, \forall i, j, \\
[\mathbf{T}_i, \mathbf{W}_i] &= [\mathbf{U}_i, \mathbf{X}_i] = [\mathbf{V}_i, \mathbf{W}_i] = [\mathbf{W}_i, \mathbf{X}_i] = [\mathbf{X}_i, \mathbf{Z}_i] = [\mathbf{T}_i, \mathbf{V}_i] = [\mathbf{U}_i, \mathbf{V}_i] = 0 \\
[\mathbf{T}_{\pm}, \mathbf{X}_{\mp}] &= [\mathbf{U}_{\pm}, \mathbf{Z}_{\mp}] = [\mathbf{V}_{\pm}, \mathbf{Z}_{\mp}] = [\mathbf{T}_{\pm}, \mathbf{U}_{\mp}] = 0
\end{aligned}$$

La primera fila de conmutadores indica la ortogonalidad que existe entre las regiones  $\mathbf{T} \perp \mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{U} \perp \mathbf{W}$  y  $\mathbf{V} \perp \mathbf{X}$ . De esta manera se concluye que existen los siguientes toroides maximales, indizados por su respectiva subálgebra de Cartan:

$$\begin{array}{lll}
\blacksquare \mathbf{T}_+ \mathbf{W}_+ \mathbf{Z}_+ & \blacksquare \mathbf{V}_+ \mathbf{Z}_- \mathbf{X}_- & \blacksquare \mathbf{U}_+ \mathbf{Z}_- \mathbf{W}_- \\
\blacksquare \mathbf{T}_+ \mathbf{X}_- \mathbf{Z}_- & \blacksquare \mathbf{V}_+ \mathbf{X}_+ \mathbf{W}_+ & \blacksquare \mathbf{U}_+ \mathbf{X}_+ \mathbf{W}_+ \\
\blacksquare \mathbf{T}_- \mathbf{X}_+ \mathbf{Z}_+ & \blacksquare \mathbf{V}_- \mathbf{Z}_+ \mathbf{X}_+ & \blacksquare \mathbf{U}_- \mathbf{Z}_+ \mathbf{W}_+ \\
\blacksquare \mathbf{T}_- \mathbf{W}_- \mathbf{Z}_- & \blacksquare \mathbf{V}_- \mathbf{W}_- \mathbf{X}_- & \blacksquare \mathbf{U}_- \mathbf{X}_- \mathbf{W}_-
\end{array}$$

<sup>12</sup>La razón de esto es actuar de manera análoga que con  $\mathfrak{su}(2)$ , dónde en la representación canónica de la base la matriz de Pauli  $\sigma_3$  es la única diagonal.

■  $W_3 X_3 Z_3$

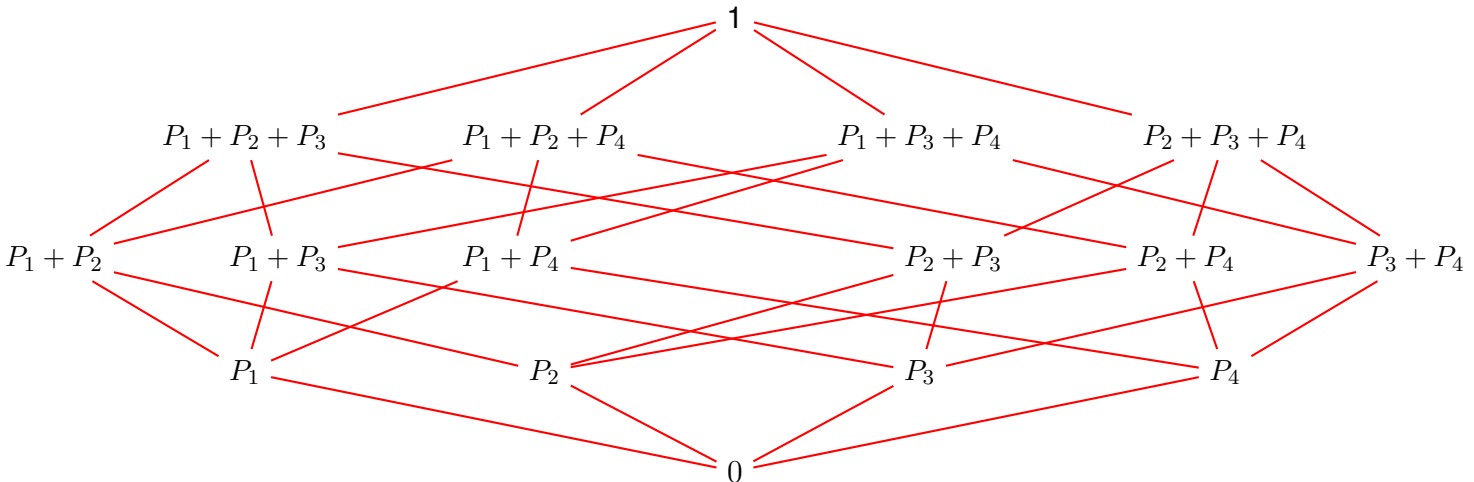
Teniendo esto, el siguiente paso es encontrar todos los contextos posibles dentro de estas subálgebras. La situación es a primera vista decepcionante dado que todas las subálgebras comparten la misma familia de proyectores que  $W_3 X_3 Z_3$  (o equivalentemente, de cualquier subálgebra generada por tríadas de terceros operadores). Se concluye, entonces, que el único contexto en  $SU(4)$ , para una base fija, posee 3 generadores y sus elementos tienen la forma:

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\theta_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\theta_1} \end{pmatrix}$$

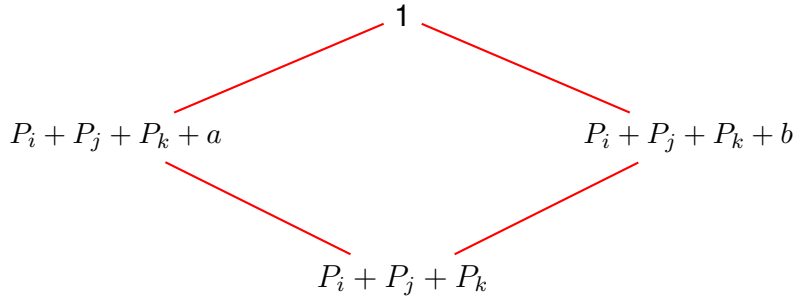
Dónde  $\sum_i \theta_i = 0$ . Este contexto posee entonces una familia de proyectores  $P_1, P_2$  y  $P_3$ , en correspondencia con la cantidad de generadores, con un retículo de proyectores Booleanos bastante simple:

$$\mathcal{P}(SU(4)) = \{0, P_1, P_2, P_3, P_1 + P_2, P_2 + P_3, P_1 + P_3, 1\}$$

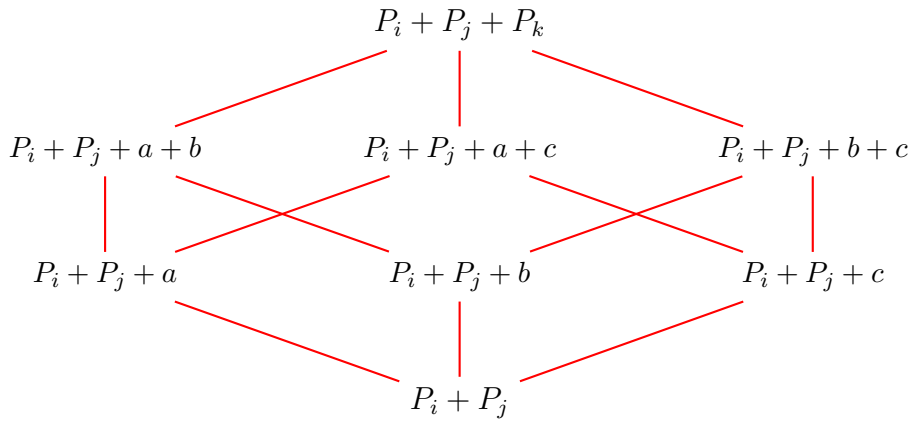
Por otro lado, si se agrega la identidad  $1_4$ , la base presentada para  $\mathfrak{su}(4)$  se convierte en una base para la totalidad del álgebra de matrices  $M_4(\mathbb{C})$ . En consecuencia, solo con agregar un elemento más, diagonal, a los generadores, aparecen nuevas subálgebras abelianas maximales, con 4 generadores en vez de 3. Estas nuevas subálgebras tienen proyectores que antes no aparecían en  $SU(4)$ , generando un retículo de proyectores mucho más interesante, listados explícitamente en el apéndice D en la base canónica. Básicamente, dado un retículo similar al anterior, más el proyector  $P_4$ :



Cada nodo en la primera fila tiene asociado a su vez un subretículo:



Mientras en la tercera fila:



En la última fila se tienen subretículos similares a los de la cuarta. Cada elemento está calculado explícitamente en el apéndice.

El espectro de Gel'fand  $\Sigma(C)$  tiene una base de 4 elementos  $\{\omega_i\}_{i=1}^4$ . Para el subcontexto  $C_{i,j,k}$  generado por  $\{P_i + P_j + P_k\}$ ,  $\Sigma(C_{i,j,k}) = \{\omega'_l, \omega'_{i,j,k}\}$  y para  $C_{i,j}$  generado por  $\{P_i + P_j\}$ ,  $\Sigma(C_{i,j}) = \{\omega''_k, \omega''_l, \omega''_{i,j}\}$ .

## 2.2. Realización Geométrica de $\mathcal{C}$

El paso a seguir en la construcción, consiste en introducir una noción de topología sobre la categoría de contextos. El objetivo de esto es establecer un escenario en el cual las nociones de localidad y globalidad, en el sentido de las imágenes de los prehaces, se puedan estudiar de manera detallada.

De esa manera, en esta sección se construirá una topología de Grothendieck que permita, en particular, caracterizar estados físicos según su separabilidad. Para desarrollar esto, se determinará una noción de cubrimiento característica de cada estado posible de un sistema, a través de la *entropía contextual* asociada a cada contexto en la categoría  $\mathcal{C}$ , fijando un estado  $\rho$ . Desde la perspectiva de álgebras de operadores, al fijar un estado para el álgebra,

se está dotando a los contextos de un producto interior a través del operador de traza; esto permite construir un espacio de Hilbert  $\mathbb{H}_\rho$ , en general reducible, asociado a cada contexto y al estado seleccionado, a través de la construcción de Gel'fand-Naimark-Segal. La entropía resulta ser idénticamente cero, sí y solo sí,  $\mathbb{H}_\rho$  es irreducible.

Se utiliza entonces la realización geométrica de la categoría de contextos  $\mathcal{C}$  para así determinar un espacio topológico característico de  $\mathcal{C}$ . Luego, se definirá una métrica sobre dicho espacio topológico, inducida por la medida caracterizada por el estado. Esta métrica permitirá generar una topología de Lawvere-Tierney  $j$  sobre el topos  $\mathbf{Set}^{C^{op}}$  a través de una proyección a  $\mathcal{C}$  desde su espacio topológico característico. En consecuencia, se tendrá una topología de Grothendieck  $J$  sobre  $\mathcal{C}$ .

### Realización Geométrica

El primer paso de esta construcción es hacer una deconstrucción simplicial de la categoría. Para eso, se introduce la siguiente definición.

**Definición 2.2.1.** *Dada la categoría de todas las categorías  $\mathbf{Cat}$  y la categoría de los conjuntos simpliciales  $\mathbf{SimpSet}$ , se define el functor Nerve:  $\mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{SimpSet}$  que a cada categoría le asigna un conjunto simplicial.<sup>13</sup>, para  $n \in \mathbb{Z}^+$ .*

La manera como actúa este functor es intuitiva. A cada elemento de la categoría, le corresponde un 0-símplice. Los morfismos son los 1-símplices. Los diagramas conmutativos de la forma:

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{f} & y \\ \downarrow g & \nearrow h & \\ z & & \end{array}$$

Son los 2-símplices y así sucesivamente. Todo conjunto simplicial se traduce en un espacio topológico, teniendo en cuenta la manera en que símplices de menor orden se acoplan a los de mayor. Esta acción de aglomerar símplices para generar espacios topológicos es lo que se denomina la *realización geométrica* de un espacio simplicial. Se define entonces el functor

<sup>13</sup>Un conjunto simplicial  $s \in \mathbf{SimpSet}$  es un prehaz  $s : \Delta \rightarrow \mathbf{Set}$  definido sobre la categoría  $\Delta$  de objetos simpliciales. Los objetos simpliciales  $[n] \in \Delta$  tienen la forma  $[n] = \{0 < 1 < 2 < \dots < n\}$  y forman una categoría mediante funciones que preservan el orden. Entonces, cada conjunto simplicial puede verse como una secuencia de conjuntos  $X_0, X_1, \dots$  donde a cada  $[n]$  le corresponde un conjunto  $X_n$ , con morfismos  $d_i : X_{n+1} \rightarrow X_n$  tales que  $d_i d_j = d_{j-1} d_i$  con  $i < j$ . Estos son una abstracción de los complejos simpliciales, donde cada  $X_n$  es el conjunto de  $n$ -símplices y los  $d_i$  los llamados mapas frontera.

realización geométrica sobre la categoría **SimpSet** de la siguiente manera:

$$|-| : \mathbf{SimpSet} \rightarrow \mathbf{Top}$$

Dónde **Top** es la categoría de los espacios topológicos. Teniendo esto, es posible definir la realización geométrica de una categoría, componiendo los dos funtores previamente discutidos

$$|Nerv(-)| : \mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{Top}$$

El espacio topológico imagen de una categoría ante este funtor se denomina el *espacio clasificador de la categoría*.

Lo que se hace entonces es identificar una categoría con el grafo dirigido determinado por los objetos de la categoría como vértices y los morfismos como aristas, además de símplices de mayor orden.

Ahora, es importante introducir la noción de topología de Grothendieck, para la categoría de contextos  $\mathcal{C}$ , teniendo su estructura posetal. Dado un contexto  $V \in \mathcal{C}$ , se define un *cubrimiento* de  $V$  como un conjunto  $S \subset \mathcal{C}$  tal que  $S \in \downarrow V$ . Con esto, se introduce la siguiente definición adaptada.

**Definición 2.2.2.** Una topología de Grothendieck  $J$  sobre la categoría de contextos  $\mathcal{C}$  es una aplicación

$$J : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$$

Que a cada  $V \in \mathcal{C}$  le asigna un conjunto de contextos  $J(V)$  que debe satisfacer los siguientes axiomas:

- El recubrimiento maximal  $\downarrow V \in J(V)$
- Si  $S \in J(V)$  y  $W \leq V$ , entonces  $S \cap \downarrow W \in J(W)$
- Si  $S \in J(V)$  y  $R$  es un recubrimiento de  $V$  tal que  $R \cap \downarrow W \in J(W)$  para cada  $W \in S$ , entonces  $R \in J(V)$

La categoría de contextos  $\mathcal{C}$  equipada con una topología de Grothendieck  $J$  conforma el sitio de contextos  $(\mathcal{C}, J)$ .

Además, como consecuencia de la relación que existe entre una topología de Lawvere-Tierney  $j$  sobre **Set**<sup>cop</sup> y una topología de Grothendieck  $J$  sobre  $\mathcal{C}$ , es posible definir  $j$  sobre el topos de prehaces con la categoría de contextos como base. De esta manera, se introduce la topología de Lawvere-Tierney, para el topos **Set**<sup>cop</sup>, teniendo en cuenta que  $j : \Omega \rightarrow \Omega$ , con  $\Omega$  el clasificador de subobjetos del topos, y que  $\Omega$  es un *local*, de manera que  $j$  resulta ser equivalente al núcleo del local  $\Omega$  [25]:

**Definición 2.2.3.** El núcleo de un local  $\mathcal{L}$  es una función  $j : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$  que satisface, para todo  $a, b \in \mathcal{L}$ :

- $a \leq j(a)$
- $(j \circ j) = j$
- $j(a \wedge b) = j(a) \wedge j(b)$

En este sentido, encontrar un núcleo para el local  $\mathcal{D}(\mathcal{C})$  es equivalente a determinar una topología de Lawvere-Tierney sobre el topos de prehaces definido sobre la categoría de contextos  $\mathcal{C}$ . La relación precisa con las topologías de Grothendieck sobre  $\mathcal{C}$  está contenida en la siguiente proposición:

*Proposición:* Sea  $J$  una topología de Grothendieck sobre  $\mathcal{C}$ . Se define la función  $j_J : \mathcal{D}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{C})$ :

$$j_J(U) \equiv \{V \in \mathcal{C} \mid U \cap \downarrow V \in J(V)\}$$

Esta aplicación es un isomorfismo de orden entre las topologías de Grothendieck sobre  $\mathcal{C}$  y los núcleos de  $\mathcal{D}(\mathcal{C})$ . Tenemos además el mapeo inverso:

$$J_j(V) = \{S \in \mathcal{D}(\downarrow V) \mid V \in j(S)\}$$

Esto establece una equivalencia entre las topologías de Grothendieck sobre  $\mathcal{C}$  y los núcleos sobre  $\mathcal{D}(\mathcal{C})$ .

Algunos ejemplos de topologías inducidas son:

- $j(S) = S$ :  
la topología de Grothendieck inducida en  $\mathcal{C}$  es

$$J(V) = \{S \in \mathcal{D}(\downarrow V) \mid V \in S\} = \{\downarrow V\}$$

Esta es la *topología indiscreta*.

- $j(S) = \mathcal{C}$ : En este caso.

$$J(V) = \{S \in \mathcal{D}(\downarrow V) \mid V \in \mathcal{C}\} = \mathcal{D}(\downarrow V)$$

Por el contrario, esta es la *topología indiscreta*.

La manera de proceder, entonces, será utilizar el espacio característico de  $\mathcal{C}$  para construir un núcleo sobre el clasificador de subobjetos. La manera de hacer esto, será dotando el espacio característico de una métrica, lo cual representa ventajas tanto en el aspecto físico como matemático.

Por un lado, la noción de *distancia* entre contextos, hace más clara la distinción entre la información contenida en cada contexto respecto a aquellos que le son comparables en términos del orden. Matemáticamente, se verá que solo existe una *única* manera de asignar esta métrica, dada la naturaleza de los contextos. En conjunto, esto constituye una poderosa herramienta a la hora de manipular las proposiciones físicas.

## 3. Información

En este capítulo se utilizará el concepto de *variación de la información*, herramienta usual en el análisis de aglomeración de datos en teoría de la información, para generar una topologización (à la Grothendieck) de la categoría de eventos en términos de implicaciones probabilísticas, esto es, se definirá la noción de *cubrimiento de un evento probabilístico*  $V$  a través de todos los eventos  $W$  que estén condicionalmente correlacionados según la entropía mutua ( $S(V|W) = 0$ ).

La topologización de la categoría  $\mathcal{C}$  ya había sido previamente estudiada por K. Nakayama [31], en un escenario donde la topología podía ser inducida a través de una conexión de Galois entre  $\mathcal{C}$  y la categoría de las subálgebras de un álgebra de Poisson  $\mathcal{O}$  (i.e. las familias de observables clásicos). En contraste, se tomará distancia de esa construcción dado que la conexión entre ambas categorías depende de manera indispensable de la existencia de operadores cuantización-clasicalización que no se consideran prácticos o son demasiado aparatosos, tanto matemática como conceptualmente, como para ser utilizados con naturalidad. En ese sentido, se busca construir una topologización basada solo en la estructura probabilística, bajo la suposición de que la información clásica está en cierto sentido *localizada* en el marco probabilístico de la mecánica cuántica. Esto, sobre la base de que toda medición en un instante de tiempo es clásica (lo que corresponde a un evento) y por lo tanto, la identificación de eventos puramente cuánticos se realiza a través de la recopilación extendida en el tiempo, de eventos clásicos. Además, la estructura en la que están organizados los eventos dentro de la categoría  $\mathcal{C}$ , sugiere la prevalencia de información puramente clásica en ciertas regiones (sub-retículos booleanos del retículo general de la  $C^*$ -álgebra).

Esta construcción, además será fundamental para los siguientes capítulos, donde la existencia de una forma de topología es crucial en el análisis e identificación de invariantes cohomológicos y modelos genéricos.

### 3.1. Metrización y Lógica

El primer paso será la construcción de una metrización, en un sentido general, y luego se presentará que solamente cierta familia de métricas es posible sobre el espacio característico si se imponen ciertas propiedades deseables. Así, se introduce lo siguiente.



*Proposición:* Una función isotona<sup>1</sup>  $\mu : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  genera una pseudo-métrica[9]:

$$d_\mu(x, y) = \mu(x \vee y) - \mu(x \wedge y)$$

Es claro que  $d_\mu(x, y) = 0$  no implica  $x = y$ .

Así, dada una función  $\mu$  como la de la proposición, definida sobre la categoría de contextos, es posible asignar una medida para cada 1-símplice del espacio característico de manera natural.

### Sintaxis y Semántica

Dado que el rol de la métrica, tal como se está introduciendo, es parametrizar un operador lógico dentro del topos, es preciso clarificar la manera en que se manipulan lógicamente los objetos del topos.

El clasificador de subobjetos  $\Omega$  actuando sobre cada contexto, es en particular, un *local* (álgebra de Heyting); en ese sentido, posee un elemento terminal  $\mathbf{1}_\Omega$  que actúa sobre cada contexto en la forma  $\mathbf{1}_\Omega(V) = \downarrow V$ , además de un elemento inicial  $\mathbf{0}_\Omega$  que a todos los contextos les asigna el cubrimiento vacío  $\emptyset$ . Además posee un orden de la forma  $D_1 \leq D_2$  si y solo si  $D_1 \subseteq D_2$  para  $D_1, D_2 \in \Omega(V)$ , con conectivos definidos en cada contexto  $V$  como:

$$D_1 \wedge D_2 \equiv D_1 \cap D_2$$

$$D_1 \vee D_2 \equiv D_1 \cup D_2$$

$$D_1 \rightarrow D_2 \equiv \{W \in \downarrow V \mid \forall Z \in \downarrow W, Z \in D_1, \text{ entonces } Z \in D_2\} = \bigcup \{D \in \Omega(V) \mid D \cap D_1 \subseteq D_2\}$$

Utilizando el último resultado es posible definir la negación (o pseudocomplemento) como es usual en cualquier álgebra de Heyting ( $\neg D \equiv D \rightarrow 0$ ):

$$\neg D \equiv \{W \in \downarrow V \mid \forall Z \in \downarrow W, Z \notin D\} = \bigcup \{D' \in \Omega(V) \mid D \cap D' = \emptyset\}$$

Esto es simplemente la implementación del lenguaje de Mitchell-Bénabou para topos. En un sentido más general, este lenguaje señala que cada proposición es un término cuyo tipo es el clasificador de subobjetos  $\Omega$  [1], esto es, cada proposición es un morfismo entre su *dominio de definición* (un objeto del topos dónde se definen las variables) y  $\Omega$  (su *interpretación*). De esta manera, las proposiciones de la forma:

$$\psi(x) : \Sigma(V) \rightarrow \Omega(V)$$

Obedecen las operaciones lógicas definidas anteriormente. Es importante notar que si dos proposiciones se operan lógicamente entre sí, necesariamente deben tener el mismo dominio

<sup>1</sup>Una función  $f : L \rightarrow L$  sobre un poset (en particular, un retículo)  $L$  se denomina isotona si para  $x \leq y$  entonces  $f(x) \leq f(y)$

de definición. Esto significa que cada contexto define sus proposiciones y su propia lógica de manera *local*. En ese sentido, para cada proyector en  $\Sigma(V)$  sobre un contexto  $V$ , se puede asignar un elemento en  $\Omega(V)$  en forma de proposición, y en general, a cualquier secuencia finita de proyectores.

Respecto a la semántica, es preciso introducir la relación de *forcing*, que se define en la forma:

$$V \Vdash \phi(\alpha) \leftrightarrow \alpha \in \{x|\phi(x)\}$$

Donde  $\alpha \in U \subseteq X$  es un elemento de un subcontexto  $U$  de un contexto  $X$ . Se dice, entonces, que  $U$  *forza*  $\phi(\alpha)$  si el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc} & & \{x|\phi(x)\} & \longrightarrow & 1 \\ & \nearrow & \downarrow & & \downarrow \text{true} \\ U & \xrightarrow{\alpha} & X & \xrightarrow{\phi(x)} & \Omega \end{array}$$

### 3.2. Variación Cuántica de la Información

Una parte esencial de la construcción, matemáticamente y para su interpretación, es la denominada construcción de Gel'fand-Naimark-Segal: Dado un contexto particular  $C$  y un estado del álgebra  $\omega \in \Sigma(C)$ , es posible construir un espacio de Hilbert sobre el cual el álgebra de observables  $C$  actúa. La manera de hacer esto es definiendo un producto interior entre los elementos del contexto a través del estado escogido, en la forma:

$$\langle a|b \rangle = \omega(a^*b), \quad \forall a, b \in C$$

Rigurosamente, este no es un producto interior dado que es posible tener  $\langle a|a \rangle = 0$ , sin que  $a = 0$ . El conjunto de todos los elementos en el contexto  $N_\omega = \{a \in C | \langle a|a \rangle = 0\}$  conforma un ideal a izquierda dentro del álgebra. El espacio de Hilbert que se define con base al contexto  $C$ , dependiente del estado  $\omega$ , se obtiene entonces como [6]:

$$\mathbb{H}_{C,\omega} = C/N$$

Dónde cada elemento del espacio de Hilbert tendrá la forma  $[a] = a + N_\omega$ . La manera en que actúan los operadores en  $C$  sobre  $\mathbb{H}_{\omega,C}$  es a través de una representación  $\pi_\omega$  que envía cada elemento de  $C$  en un operador sobre el espacio de Hilbert construido. La manera en que se define esa aplicación es:

$$\pi_\omega(a) |[b] \rangle = |[ab] \rangle$$

Usualmente  $\mathbb{H}_{C,\omega}$  es reducible, de manera que se puede ver como una suma directa:

$$\mathbb{H}_{C,\omega} = \bigoplus_i \mathbb{H}_i$$

Para cada elemento de la descomposición existe un proyector  $P_i : \mathbb{H}_{C,\omega} \rightarrow \mathbb{H}_i$ , que en conjunto conforma una familia de proyectores ortogonales. De esta manera se pueden generar elementos de los subespacios  $i$ -ésimos en la forma:

$$|[\chi_i]\rangle = \frac{P_i |[\mathbf{1}]\rangle}{\nu_i}$$

$\nu_i = \langle [\mathbf{1}] | P_i | [\mathbf{1}] \rangle$ . Con lo cual se tiene una descomposición del elemento identidad:

$$|[\mathbf{1}]\rangle = \sum_i \nu_i |[\chi_i]\rangle$$

Esto permite describir el elemento  $\omega(a) = \langle [\mathbf{1}] | [a] \rangle = \langle [\mathbf{1}] | \pi_\omega(a) | [\mathbf{1}] \rangle$  como:

$$\omega(a) = \sum_i \langle [\chi_i] | \rho_\omega \pi_\omega(a) | [\chi_i] \rangle$$

Dónde:

$$\rho_\omega = \sum_i \nu_i^2 |[\chi_i]\rangle \langle [\chi_i]|$$

Es la matriz densidad asociada al estado  $\omega$ . Es claro que esta representación del estado puede en general no ser un estado puro y que esto solamente puede suceder sí y solo sí la representación  $\pi_\omega$  es *irreducible*. Se tiene entonces que la *entropía de von Neumann* asociada al estado  $\omega$ :

$$S(\omega) = -\text{Tr}(\rho_\omega \log \rho_\omega)$$

Es igual a cero, si y solo si  $\mathbb{H}_{C,\omega}$  es irreducible.

La entropía, en términos functoriales, ha sido bien definida en [14, 15] para sistemas de dimensión finita; construcción que se utilizará aquí. Se parte, entonces, de un sistema cuántico con espacio de Hilbert  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$ , usualmente un sistemas de  $m$  espines y  $l$  estados accesibles tales que  $n = l^m$ . Ahora, se tiene una familia de proyecciones ortogonales  $(P_1, \dots, P_k)$  las cuales pueden formar una base para construir operadores sobre el espacio de Hilbert, como consecuencia de la descomposición espectral que todo operador  $\hat{A} \in B(\mathbb{H})$  posee:

$$\hat{A} = \sum_i a_i P_i$$

Donde la suma se realiza sobre todos los autovalores  $a_i$  asociados al operador  $\hat{A}$ . Sobre un contexto arbitrario  $V = \{\hat{A}_1, \dots, \hat{A}_k\}$ , los elementos  $A_i$  pueden ser entonces escritos en términos de una misma base de proyecciones ortogonales, como consecuencia de la conmutatividad mutua entre los operadores. En ese sentido, cada contexto tiene una base asociada que diagonaliza a todos los operadores que lo componen, al mismo tiempo. Una forma de expresar esto es a través de la *construcción del doble conmutador* de von Neumann, dónde:

$$\{P_1, \dots, P_k\}'' = \mathbb{C}P_1 + \dots + \mathbb{C}P_k$$

Así mismo, teniendo que cada proyección tiene como rango un subespacio del espacio de Hilbert, es posible asociar a cada contexto  $V$  una familia de subespacios que conformarán un retículo  $O(V)$  ordenado por la inclusión, dónde cada espacio será determinado por todos los proyectores en  $V$ , que son combinaciones lineales de la base. Estos retículos están ordenados de la misma manera que la categoría de contextos  $\mathcal{C}$ , dónde un retículo  $O(W)$  está por debajo de otro  $O(V)$  en el orden si es subretículo booleano<sup>2</sup>.

Ahora, así como en la construcción GNS, se define  $\rho$  un estado en su representación de operador densidad. Decimos que  $\rho$  es diagonal en el contexto  $V$  si representa un funcional en el espectro del contexto, y por lo tanto  $\rho = \sum_i \lambda_i P_i$  y  $P_i \in V$ .  $\rho$  asigna un valor de probabilidad a cada autovalor  $a_i$  de un observable  $A$  a través de la *regla de Born*:

$$p_i = \text{tr}(\rho P_i)$$

De manera que, sobre toda la familia de proyecciones que diagonalizan a  $A$ , se define una distribución de probabilidad  $P_C = (p_1, \dots, p_k)$  cuando  $\rho$  representa un elemento en el espectro del contexto al que pertenece  $A$ . En caso contrario, siempre existe un elemento  $\rho_V = \rho|_V$  que es la proyección de un estado arbitrario a un contexto particular  $V$ . Es posible, en consecuencia, calcular la entropía de Shannon para la distribución de probabilidad generada por la proyección de un estado  $\rho_V$  para los operadores en ese contexto:

$$H(P_C) = - \sum_i^n p_i \ln p_i = -\text{Tr}(\rho_V \ln \rho_V)$$

Si se define  $P_i = |\chi_i\rangle \langle \chi_i|$  como en la construcción GNS. Para cada familia de proyecciones que diagonaliza a cada contexto  $V$ , entonces corresponde una distribución de probabilidad definida por un estado determinado  $\rho$ . La aplicación que a cada contexto le asigna un valor de entropía a través de este mecanismo es funtorial y actúa en la forma:

$$H_\rho : \mathcal{C} \rightarrow [0, \ln n]$$

A este funtor se le denomina *entropía contextual* y preserva el orden a lo largo de la categoría  $\mathcal{C}$  en el sentido que si  $W \leq V$  entonces  $H_\rho(W) \leq H_\rho(V)$ . Es importante notar que la entropía de von Neumann para el estado  $\rho$  será igual a la mínima entropía contextual sobre todos los contextos maximales [15]. Directamente se tiene que si este valor es cero, el estado es puro, caso contrario  $\rho$  es mixto.

Una conclusión de la discusión anterior es que cada contexto puede presentarse como un conjunto finito con una medida de probabilidad definida por el estado  $\rho$ . Esta presentación es una subcategoría de la categoría de espacios finitos de probabilidad **FinProb**, donde los morfismos entre espacios de probabilidad, son las funciones que preservan la medida, i. e.

<sup>2</sup>e.g. Sea  $V = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}''$  y  $W = \{P_1 + P_2, P_3, P_4\}''$ , entonces  $O(W) \leq O(V)$

dados espacios de probabilidad  $(X, p)$  y  $(Y, q)$  se dice que  $f : (X, p) \rightarrow (Y, q)$ ,  $f$  preserva la medida si:

$$q_j = \sum_{i \in f^{-1}(j)} p_i, \quad \forall j \in Y$$

En contexto, se ha concluido que [15], if  $V \leq W$ , para  $V = \{Q_1, \dots, Q_k\}''$ , entonces  $W = \{P_1^1, \dots, P_{l_1}^1, P_1^2, \dots, P_{l_2}^2, \dots, P_1^k, \dots, P_{l_k}^k\}''$ , dónde  $P_i^j$  son proyecciones ortogonales tales que:

$$Q_j = \sum_{i=1}^{k_j} P_i^j$$

La medida basada en  $\rho$  es lineal para sumas de proyecciones ortogonales y la última ecuación se satisface cuando dos contextos son comparables en términos del orden. Entonces, existe una función que preserva la medida entre dos contextos comparables  $V \leq W$  (en la dirección contraria) que mapea cada proyección en  $W$  en la proyección en  $V$  a la cual pertenece en términos de una combinación lineal.

Este resultado es especialmente robusto, teniendo en cuenta los resultados presentados en [5], dónde se prueba que el único morfismo

$F : \text{Mor}(\mathbf{FinProb}) \rightarrow [0, \infty)$  entre morfismos de la categoría y números reales no-negativos que satisfaga:

- Funtorialidad

$$F(f \circ g) = F(f) + F(g)$$

- Convexidad Lineal

$$F(\lambda f \oplus (1 - \lambda)g) = \lambda F(f) + (1 - \lambda)F(g)$$

- Continuidad respecto a la topología de la categoría.

Tiene la forma, para  $f : V \rightarrow W$  and  $c \geq 0$ :

$$F(f) = c(H(V) - H(W))$$

Utilizando los resultados presentados al principio del capítulo, se define la siguiente métrica sobre la categoría de los contextos:

$$d_\rho : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \rightarrow [0, 2 \ln n]$$

$$d_\rho(V, W) = H(V \vee W) - H(V \wedge W)$$

Esta métrica se denomina *variación de la información* en el contexto de la teoría de la información, aquí definida entre contextos entendidos como espacios de probabilidad [27]. Es

útil notar también que  $H(V \vee W)$  es la *entropía conjunta* y  $H(V \wedge W)$  la *información mutua*. Entonces, en particular, si  $W \leq V$ , una consecuencia de la estructura posetal es:

$$d_\rho(V, W) = H(V) - H(W)$$

Lo que, en conclusión, conduce a que la variación de la información sobre los espacios de probabilidad asociados a los contextos, es la única posible métrica que respeta las condiciones anteriormente mencionadas. Retomando la construcción GNS, vemos que esta expresión se puede escribir como:

$$d_\rho(V, W) = -\text{Tr}(\rho_V \ln \rho_V - \rho_W \ln \rho_W)$$

Si tomamos la forma previamente discutida para un par arbitrario de contextos comparables  $V \leq W$ :

$V = \{Q_1, \dots, Q_k\}$  y  $W = \{P_1^1, \dots, P_{l_1}^1, P_1^2, \dots, P_{l_2}^2, \dots, P_1^k, \dots, P_{l_k}^k\}$ , tenemos que:

$$H(W) = H(V) + \sum_{i=1}^k p_i H\left(\frac{q_1^i}{p_i}, \frac{q_2^i}{p_i}, \dots, \frac{q_{l_i}^i}{p_i}\right)$$

Expresión que se construye utilizando la propiedad de recursión que tiene la entropía de Shannon [14]. Entonces, la variación de la información se hace cero cuando el último término se anula. Este término puede ser interpretado, utilizando la versión entrópica del teorema de Bayes:

$$H(W) - H(V) = H(W \wedge \neg V) - H(V \wedge \neg W)$$

Dónde los términos de la derecha son equivalentes a las entropías condicionales  $H(V|W)$  y  $H(W|V)$ . De esta forma, es posible concluir que:

$$H(W \wedge \neg V) - H(V \wedge \neg W) = \sum_{i=1}^k p_i H\left(\frac{q_1^i}{p_i}, \frac{q_2^i}{p_i}, \dots, \frac{q_{l_i}^i}{p_i}\right)$$

En ese sentido, si la variación de la información es igual a cero, lo que se tiene es la igualdad entre las probabilidades condicionales:

$$H(W|V) = H(V|W)$$

Es decir, la información que se gana en una dirección del poset es igual en el sentido contrario. En términos del estado  $\rho$  escogido para la construcción de las distribuciones de probabilidad, que la entropía sea constante a lo largo de par de contextos comparables en el orden significa que los subespacios agregados en el retículo no poseen una componente diferente de cero para el estado  $\rho$ , es decir, proyectado a esos subespacios el estado se anula.

### 3.3. Topología Entrópica

Teniendo los elementos ya mencionados, es posible finalmente introducir la topologización *sobre* la categoría de contextos y su respectivo comportamiento lógico.

El primer paso es definir alguna *relación de congruencia*<sup>3</sup> sobre el poset  $\mathcal{D}(\mathcal{C}) = \Omega$ , dado que estas relaciones resultan ser equivalentes a núcleos del poset, y estos resultan ser equivalentes a las topologías de Lawvere-Tierney para el topos de prehaces  $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$  [28]. Para esto, se toma la métrica inducida del poset de objetos  $Ob(\mathcal{C})$  en la categoría de contextos al retículo de sus secciones iniciales  $\mathcal{D}(\mathcal{C})$ , teniendo en cuenta que esta asignación es un endofunctor sobre la categoría de los posets y la entropía contextual es un mapeo isótono entre  $Ob(\mathcal{D})$  y la recta real como orden. Así, se tiene una entropía definida sobre las secciones iniciales:

$$H_\rho : \mathcal{D}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbb{R} :: V \mapsto \text{máx}\{H(W) | W \in V\}$$

Así, se le puede asignar una distancia como se presentó en la sección anterior. Esto forma un retículo pseudométrico  $(\mathcal{D}(\mathcal{C}), d_\rho)$ . Sin embargo, es posible construir un espacio métrico asociado utilizando el siguiente teorema:

**Teorema 3.3.1.** [9] *Todo retículo pseudométrico  $L$ , es un espacio pseudométrico, en el cual las disyunciones y las conjunciones son uniformemente continuas. La relación  $d_\rho(X, Y) = 0$  es una relación de congruencia, que mapea  $L$  isométricamente y epimórficamente en un retículo métrico.*

Esta relación de congruencia induce el siguiente núcleo:

$$j_\rho(V) = \bigvee \{W \in \mathcal{D}(\mathcal{C}) | (V, W) \in \Theta_\mu\} = \bigvee \{W \in \mathcal{D}(\mathcal{C}) | d_\rho(V, W) = 0\}$$

Un núcleo es, en particular, un operador de clausura, de manera que los puntos fijos corresponden a los cerrados en el espacio métrico asociado, los cuales además generan un *sublocal*  $\mathcal{M}_j$  de  $\Omega$  que permite escribir el núcleo también en la forma:

$$j_\rho(V) = \bigcap \{M \in \mathcal{M}_j | V \subseteq M\}$$

Es decir, otra manera de entender la acción del núcleo sobre el clasificador de subobjetos es generando el cerrado que mejor aproxima una sección inicial desde arriba. Además, se tiene la topología de Grothendieck  $J_\mu$  asociada a este núcleo:

$$J_\rho(V) = \{S \in \mathcal{D}(\downarrow V) | d_\rho(S, \downarrow V) = 0\} = \{S \in \mathcal{D}(\downarrow V) | H(S, \downarrow V) = H(S)\}$$

<sup>3</sup>Una relación de congruencia en un retículo  $L$  es una relación de equivalencia que además es un subretículo de  $L \times L$ .

Dónde en la segunda igualdad se ha utilizado el hecho de que  $S$  es subconjunto de  $\downarrow V$ . La interpretación de esto puede hacerse a través de la denominada *regla de la cadena* de la entropía condicional:

$$H(X|Y) = H(X, Y) - H(Y)$$

Luego, si  $H(S, \downarrow) = H(S)$ , entonces  $H(\downarrow V|S) = 0$ . Esto quiere decir que  $S$  es cubrimiento solamente si determina completamente a la sección inicial  $\downarrow V$ . Tenemos entonces el sitio  $(\mathcal{C}, J_\rho)$ .

Es importante tener en cuenta que la topología de Lawvere-Tierney es un operador lógico, en el sentido de cómo están definidas las proposiciones en el lenguaje de Mitchell-Bénabou. Interpretado de esta forma, la acción  $j_\rho(\phi)$  para  $\phi : \Sigma(V) \rightarrow \Omega(V)$  se puede reescribir como:

$$j_\rho(\phi) = \bigvee \{ \psi | H(\phi \vee \psi) = H(\psi \wedge \phi) \}$$

Dónde además se uso la definición de la métrica. La condición dentro de la anterior expresión es lo que en teoría de la información se denomina como un *canal libre de ruido* entre las variables aleatorias caracterizadas por las proposiciones.



## 4. Geometría

Recientes trabajos [4, 2] introducen la idea de una caracterización topológica de ciertas propiedades haz-teóricas fundamentales de los sistemas físicos. En particular, la construcción hecha por Abramsky et. al. de un elemento topológico que es condición suficiente para la *contextualidad* de un sistema, inspira la posibilidad de clasificar diferentes estados posibles para un sistema físico, a través de sus secciones definidas a través del prehaz  $\Sigma$  introducido en el capítulo anterior. El propósito de este capítulo es extender los trabajos anteriores, introduciendo criterios de cohomología sobre el formato topos-teórico que se ha venido discutiendo.

Para este propósito, se introducirán algunas herramientas de la cohomología de haces y se verá como, en el caso particular de discusión, se logra tener una imagen bastante clara de la emergencia y caracterización de fenómenos típicamente cuánticos.

### 4.1. El Complejo de Cech

Con base a la categoría de contextos  $\mathcal{C}$ , se tiene una definición de cubrimiento para un contexto  $V$  que está establecida por la topología de Grothendieck  $J$  que se esté manejando sobre el sitio de contextos. Retomando la discusión sobre la realización geométrica de la categoría, se usa la estructura simplicial de  $\mathcal{C}$  para introducir la familia de  $p$ -símplices relativa a un cubrimiento  $S = \{U_{i_0}, \dots, U_{i_p}\}$  con  $S \in J(V)$ :

$$\tau_p(S) = \{[i_0, \dots, i_p] | i_0 < \dots < i_p, U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p} \neq \emptyset\}$$

Ahora, teniendo en cuenta que el funtor de Gelfand es un prehaz abeliano, en el sentido de que la imagen de cada contexto  $V \in \mathcal{C}$  es un grupo abeliano, es posible entonces definir el *grupo de cocadenas de orden  $p$*  para el cubrimiento  $S$ :

$$C^p(S, \Sigma) = \prod_{\sigma \in \tau_{p+1}(S)} \Sigma(\sigma)$$

Dónde se aplicó la definición general para cocadenas en sitios y en particular que el producto fibrado  $U \times_V W$  de subcontextos de  $V$  es simplemente  $U \cap V$ <sup>1</sup>, de manera que  $\Sigma(\sigma)$  representa la acción de  $\Sigma$  sobre la intersección del cubrimiento indizado por  $\sigma$ . De esta manera,

---

<sup>1</sup>ver apéndice C. para la construcción en sitios generales

los elementos del grupo de cocadenas de orden 0,  $C^0(S, \Sigma)$  son familias de elementos del espectro de Gel'fand, uno por cada contexto (0-símplice) en el cubrimiento, mientras que los elementos del grupo de cocadenas de orden 1,  $C^1(S, \Sigma)$  son familias de elementos en el espectro, uno por cada par de contextos que tengan intersección no vacía en el cubrimiento  $S$  (1-símplice), y así sucesivamente.

Se toma ahora una cocadena de orden  $p$ ,  $s \in C^p(S, \Sigma)$  y se construye el operador:

$$d : C^p(S, \Sigma) \rightarrow C^{p+1}(S, \Sigma)$$

En la forma:

$$ds([i_0 \dots i_{p+1}]) = \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j s([i_0 \dots \hat{i}_j \dots i_p]) | U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_{p+1}}$$

Dónde  $\hat{i}_j$  representa la omisión del índice  $i_j$  durante la suma. De esta manera, podemos introducir los grupos de cohomología  $H^i(S, \Sigma)$  del pre haz  $\Sigma$  respecto al cubrimiento  $S$ . Esto permite definir el operador  $\partial_i : \tau_p(S) \rightarrow \tau_{p-1}(S)$  a través de la manera en que las cocadenas operadas por  $d$  actúan sobre los símlices de manera *dual*<sup>2</sup>. Dado un  $p$ -símplice  $\sigma$  y una cocadena  $s \in C^p(S, \Sigma)$ :

$$(d(s))(\sigma) = (s(\partial))(\sigma)$$

Teniendo que para un  $p$ -símplice  $\sigma$ :

$$\partial_i \sigma = [1, \dots, \hat{i}, \dots, p]$$

Clasificamos las cocadenas a través de la acción del operador  $d$  en la manera usual de la topología algebraica: el grupo de  $p$ -cociclos  $Z^p(S, \Sigma)$ , será igual al kernel de  $d$  mientras que el grupo de cofronteras  $B^p(S, \Sigma)$  será la imagen de  $d$ . Con esto, es inmediato introducir los grupos de cohomología de Cech del pre haz  $\Sigma$  respecto al cubrimiento  $S$  como  $H^p(S, \Sigma) = Z^p(S, \Sigma)/B^p(S, \Sigma)$ . Hay que notar que  $B^p(S, \Sigma) = 0$ , luego  $H^0(S, \Sigma) \simeq Z^0(S, \Sigma)$ .

Sea ahora  $s \in C^0(S, \Sigma)$  una cocadena de orden cero, la cual corresponde, entonces, a una familia de estados  $\{\rho_i \in \Sigma(U_i)\}$  para cada  $U_i \in S$ . Hacemos el siguiente cálculo para un 1-símplice  $\sigma = [i, j]$ :

$$d(s)(\sigma) = \rho_i | U_i \cap U_j - \rho_j | U_i \cap U_j$$

Vemos que si  $s \in Z^0(S, \Sigma)$ , entonces los elementos del grupo de cohomología de orden 0 para el cubrimiento  $S$  serán exactamente las familias de proyectores que para cualquier par de contextos en el cubrimiento se satisface la ecuación anterior. Esto es equivalente a la siguiente definición de *familia compatible*:

<sup>2</sup>La razón de esto es básicamente la transición que existe de la homología singular a la cohomología con coeficientes en un pre haz determinado.

**Definición 4.1.1.** Dado un prehaz  $P \in \mathbf{Set}^{cop}$  definido en  $(\mathcal{C}, J)$ ,  $V \in \mathcal{C}$  y un cubrimiento  $S \in J(V)$ , una familia compatible para un cubrimiento  $S$  es una familia  $\langle a_X \rangle_{X \in S} \in \prod_{X \in S} P(X)$  tal que para  $W \leq V \in S$ :

$$P(W \leq V)(a_V) = a_W$$

Tomando el ejemplo del funtor de Gel'fand  $\Sigma$ , una familia compatible de funcionales para un cubrimiento  $S \in J(V)$  es una familia de estados  $\{\rho_i \in \Sigma(U_i)\}$  tal que para cualquier par de contextos  $U_i \leq U_j \in S$ . Recordando la acción de  $\Sigma$  sobre morfismos entre contextos:

$$\Sigma(i_{U_j U_i})(\rho_j) = \rho_j|_{U_i} = \rho_i$$

Se tiene:

$$\rho_j|_{U_i \cap U_j} = \rho_i|_{U_i \cap U_j}$$

Con lo que se puede concluir que existe una biyección entre el conjunto de las familias compatibles respecto a el cubrimiento  $S$  y los elementos del grupo de cohomología  $H^0(S, \Sigma)$ .

## 4.2. Kochen-Specker y Haces

En el trabajo desarrollado por S. Abramsky y sus colaboradores, se utiliza un funtor diferente al espectro de Gel'fand, dado que ellos deciden ignorar completamente el caracter de  $C^*$ -álgebra que poseen los contextos (sus propósitos no lo requieren). En ese sentido, se toman conjuntos de observables, también denominados contextos, sobre los cuales se define un conjunto fijo  $O$  de posibles resultados de mediciones, y se mapea cada contexto, a través de un funtor  $\mathcal{E}$ , al conjunto de todas las funciones que van del contexto a los resultados de medida. Es decir:

$$\mathcal{E} : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$$

Que para un contexto  $U$  a la Abramsky actúa  $\mathcal{E}(U) = O^U$ . Cada elemento de  $\mathcal{E}(U)$  corresponde a la *ejecución* de una medida y, por lo tanto, tiene una probabilidad de ocurrir. Eso conduce a que  $\mathcal{E}(U)$  tiene una distribución de probabilidad asociada. Entonces, para un cubrimiento, en el sentido que lo hemos descrito, pero utilizando una topología de Grothendieck de la forma

$$J(U) = \{S \mid \cup S = U\}$$

Se tiene una distribución de probabilidad por cada elemento del cubrimiento  $S$ . A este conjunto  $\{e_U\}_{U \in S}$  es lo que se denomina un *modelo empírico*. Restringiendo el funtor  $\mathcal{E}$  solamente a aquellos elementos de  $O^U$  en el soporte<sup>3</sup> de la distribución de probabilidad asociada  $e_U$ , obtenemos un subfuntor de  $\mathcal{E}$ , denominado  $S_{\mathcal{E}}$ . Finalmente, se toma un funtor  $F_R : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$  que envía elementos de un conjunto  $X$  en funciones con codominio en un anillo  $R$ . Seleccionando

<sup>3</sup>Se define el soporte de una función  $f : X \rightarrow R$  con codominio en un anillo  $R$ , como  $\text{supp}(f) = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$

$R = \mathbb{Z}$ , se toma la composición  $F_{\mathbb{Z}}S_{\mathcal{E}}$  como el funtor sobre el cual se hace cohomología. La acción de este funtor es asociar a cada contexto, en un cubrimiento, el conjunto de combinaciones lineales de funciones en  $O^U$  que se encuentren en el soporte de  $e_U$ , con coeficientes en los enteros.

Como se dijo antes, cada una de estas funciones de  $U$  en  $O$ , representan la ejecución de una medida. La probabilidad de ocurrencia de dicha ejecución está determinada por el estado del sistema. En ese sentido, se mapean contextos en combinaciones lineales de estados. Esto es análogo a lo que se realiza con el funtor de Gel'fand, con la ventaja, en este último caso, que operativamente es más claro cómo volver a la mecánica cuántica en su lenguaje tradicional y además permite analizar de manera más detallada la información lógica y geométrica codificada en el lenguaje de topos.

Más allá, hay un punto común en ambas perspectivas, que resulta ser el que, se podría considerar, el resultado más importante hasta ahora de la formulación basada en topos de la mecánica cuántica.

*Teorema* [22]: El teorema de Kochen-Specker es equivalente al hecho de que el prehaz espectral sobre la categoría de contextos  $\mathcal{C}$ , no posee secciones globales.

Para S. Abramsky et. al. se puede concluir lo siguiente:

*Proposición* [2]: La existencia de una sección global para un modelo empírico, implica la existencia de un modelo determinista **no contextual** de variables ocultas que lo determina.

La diferencia estructural *esencial* que yace en las construcciones muestra en la enunciación de los teoremas su más cara consecuencia: en la formulación hecha en base al funtor de modelos empíricos es posible construir una condición suficiente, más no necesaria para la contextualidad, en contraste con el funtor de Gel'fand, dónde la equivalencia entre sus secciones globales y la contextualidad es un hecho. Esto conduce a tomar ideas de ambos escenarios y subsanar las falencias de uno con las ventajas del otro; mientras que en el caso basado en modelos empíricos tenemos un aparato topológico fuerte que permite caracterizar secciones, pero no podemos identificar esa información completamente con el fenómeno de contextualidad, el funtor de Gel'fand sí presenta una correspondencia total del comportamiento de sus secciones con la manifestación de contextualidad en un sistema, más no ha sido estudiado en el sentido de una cohomología de prehaces, como se ha invitado a lo largo de este capítulo.

La presentación de Kochen-Specker utilizando el prehaz espectral tiene además interesantes consecuencias en términos de la lógica que subyace a las proposiciones de carácter cuántico. Esto se deriva del siguiente teorema, adaptado a las definiciones presentadas en esta tesis:

*Teorema 3.5.5 [34]* Sea  $\mathbb{H}_{C,\omega}$  una representación genérica del contexto  $C$ . Entonces, el espacio de Stone  $S_1(th(\mathbb{H}_{C,\omega}))$  (i.e. el conjunto de los tipos de vectores de norma igual a 1) con la topología de la lógica es homeomorfo a  $\Sigma(C)$  con la topología presentada en el primer capítulo.

El resultado previo es consecuencia (teorema 3.4.6 ibid.) de la correspondencia que existe entre un estado  $\omega_\rho$ , determinado por un elemento  $\rho$  del espacio de Hilbert a través de la traza, sobre un contexto específico, y el tipo de ese elemento  $tp(\rho/\emptyset)$ <sup>4</sup>.

Por definición, el espacio de Stone para una teoría  $T$  es dual al álgebra Booleana de clases de equivalencia de fórmulas módulo  $T$ . En ese sentido,  $S_1(th(\mathbb{H}_{C,\omega}))$  es dual al álgebra de sus subconjuntos clopen [?]. Dado el isomorfismo presentado en el primer capítulo:

$$\alpha_C : \mathcal{P}(C) \rightarrow Cl(\Sigma(C))$$

Entre los proyectores y los subconjuntos clopen del espectro de Gel'fand para un contexto  $C$ , se tiene entonces el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \Sigma(C) & \xrightarrow{Arg} & S_1(th(\mathbb{H}_{C,\omega})) \\ \uparrow \Sigma & & \uparrow Stone \\ C & \xrightarrow{O} & O(C) = \mathcal{P}(C) \end{array}$$

Dónde  $O$  es el denominado *prehaz exterior*[19], que va de la categoría de contextos a la categoría de retículos booleanos de proyectores. Esto nos dice también que las clases de equivalencia de proposiciones, según la teoría de la representación, corresponden a proyectores del álgebra, lo cual es consistente con las primeras aproximaciones históricas a la lógica cuántica [36].

De esta manera, Kochen-Specker puede verse también como una imposibilidad para la extendibilidad a sección global, de ciertas cocadenas de tipos a lo largo de diferentes retículos de proyectores, en términos del funtor de Stone.

Un punto importante es la posibilidad de caracterizar diferentes niveles de contextualidad utilizando cohomología. Esta idea introducida también por S. Abramsky et. al. [2], está basada en la forma que tienen las distribuciones de probabilidad para mediciones conjuntas, en términos del haz que ellos definen. Por supuesto, esto es equivalente a hablar de correlaciones entre medidas, lo cual quiere decir que es posible clasificar los tipos de correlaciones a través de estas herramientas topológicas. En el Apéndice B se introducen los tipos de correlaciones más

<sup>4</sup>En el contexto de los espacios de Hilbert, el tipo de un elemento en el espacio está determinado por su norma

importantes, de manera que a la luz de eso es posible entender resultados en [4, 2] como el caso de las cajas de Popescu-Rohrlich, que resultan ser sistemas con correlaciones aún más locales (contextuales) que las de la mecánica cuántica. La existencia de estas correlaciones post-cuánticas es equivalente a secciones cuyas *obstrucciones* son iguales a cero en toda parte en la categoría de contextos.

### 4.3. Obstrucciones

En consecuencia, el objeto central de la caracterización de la contextualidad, son las secciones globales del pre haz espectral, de manera que es preciso introducir una definición general.

**Definición 4.3.1.** Una sección global  $\gamma$  para un pre haz  $P : \mathbf{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$  se define como la función que asigna a cada objeto  $C \in \text{Ob}(\mathbf{C})$  un elemento  $\gamma_C \in P(C)$  de tal manera que la ecuación  $\gamma_C f = \gamma_D$ , para  $f : D \rightarrow C$ , se satisfaga para todo  $f \in \text{Mor}(\mathbf{C})$ .

Otra forma de ver las secciones globales para un pre haz  $P$  es como una transformación natural  $\gamma : \mathbf{1} \rightarrow P$ . La definición anterior, para los funtores de modelos empíricos y de Gel'fand, se puede interpretar físicamente de igual manera: la existencia de estados globales únicos que reproduzcan la información marginal (i.e. relativa a subcontextos). Esto también se puede formalizar mediante otra definición útil.

**Definición 4.3.2.** Un elemento  $a \in P(V)$  para un pre haz  $P$  actuando sobre  $V \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ , se denomina una amalgamación si  $P(X \rightarrow V)(a) = a_X$  para cada  $X \in S$ , con  $S$  cubrimiento de  $V$ .

De manera que la definición de sección global es equivalente a una amalgamación única sobre toda la categoría base. Así, la existencia o no de secciones globales corresponde a la pregunta sobre la posibilidad de *extender* una sección a lo largo de toda la categoría y, así mismo, una obstrucción a una sección global es la imposibilidad de esa extensión en uno o varios elementos.

Lo que se tiene, finalmente, es la posibilidad de asociar a cada sección  $s$  un elemento  $\beta(s)$  de un grupo de cohomología que identifique la obstrucción de la sección a ser extendida, de manera que si  $\beta(s) = 0$  la sección se puede extender a sección global. Para esto, se toma una cocadena  $s \in C^0(S_V, \Sigma)$  sobre un contexto  $V$  con recubrimiento  $S$ . De este elemento se toma ahora  $y = ds \in C^1(S_V, \Sigma)$  que, evaluado sobre un 1-símplice  $\sigma = [i, j]$  como se vio antes,  $ds(\sigma) = \rho_i|U_i \cap U_j - \rho_j|U_i \cap U_j$ . Ahora calculamos  $dy$  evaluado sobre un 2-símplice  $\tau = [i, j, k]$ :

$$dy(\tau) = y_{i,j}|U_{i,j,k} - y_{i,k}|U_{i,j,k} + y_{j,k}|U_{i,j,k}$$

Reemplazando  $y = ds$ :

$$dy(\tau) = (\rho_i - \rho_j)|U_{i,j,k} - (\rho_i - \rho_k)|U_{i,j,k} + (\rho_j - \rho_k)|U_{i,j,k} = 0$$

Dónde se ha tomado  $U_{i,j,k} = U_i \cap U_j \cap U_k$ . De esta manera, es claro que  $\beta = d(y) \in H^1(S_V, \Sigma)$

<sup>5</sup>. Entonces, cuando  $\beta(s) = 0$ , se satisface la condición de compatibilidad para la sección  $s$  y

<sup>5</sup>La conclusión es trivial dado que  $d \circ d = 0$ .

por lo tanto,  $s$  representa una sección global.

En particular, puede ser relevante preguntarse si las obstrucciones que tiene una sección a ser extendida, existen en un contexto fijo  $V_1$ . Para esto, se introduce la cohomología *relativa* del functor de Gel'fand, al contexto de interés  $V_1$ . Para esto, es preciso introducir dos prehaces auxiliares:

$$\Sigma|_{V_1}(W) = \Sigma(V_1 \cap W)$$

Para el cual existe un morfismo:

$$p : \Sigma \rightarrow \Sigma|_{V_1}$$

Que actuando sobre un contexto  $W$ :

$$p_W : \Sigma(W) \rightarrow \Sigma(W \cap V_1)$$

Es decir, para el functor de Gel'fand general se hace una restricción del dominio a la intersección de todos los contextos con un contexto  $V_1$  fijo. Esto permite construir el segundo functor auxiliar  $\Sigma^{V_1}(W) \equiv \ker(p_W)$ . Es decir, este functor toma elementos para cada contexto, tales que la proyección de estos elementos al contexto fijo  $V_1$  sea cero. La cohomología construída con el functor  $\Sigma^{V_1}$  se denomina la cohomología relativa al contexto  $V_1$ .

Ahora, se toma de nuevo un objeto de la forma  $z_{i,j} = \rho_i|_{U_{i,j}} - \rho_j|_{U_{i,j}}$  para todo 1-símplice  $[i, j]$ . Ahora, se fija un elemento  $\rho_1$  en  $\Sigma(V_1)$ . Si la familia  $\{\rho_i\}$  constituye una familia compatible, entonces  $z_{i,j} = 0$ . En particular se tiene que [4]:

$$\rho_i|_{V_1 \cap U_{i,j}} = \rho_j|_{V_1 \cap U_{i,j}}$$

De manera que  $z_{i,j}|_{V_1 \cap U_{i,j}} = 0$ , y  $z_{i,j} \in \Sigma^{V_1}(U_{i,j})$ . Luego la colección  $z = \{z_{i,j}\}$  para todo par de contextos, constituye una 1-cocadena  $z \in C^1(\mathcal{U}, \Sigma^{V_1})$ . Además  $z$  es un cociclo, con lo cual la clase de equivalencia  $[z] \in H^1(\mathcal{U}, \Sigma^{V_1})$ . Dado que se fijó un contexto  $V_1$  y un elemento  $\rho_1$  en el espectro de tal contexto, al objeto  $z = \gamma(\rho_1)$  se le asocia el elemento  $\rho_1$  al cual está caracterizando en términos de su extendibilidad. Vemos que si  $\gamma(\rho_1) = 0$ , entonces  $\rho_1$  pertenece a una familia compatible que lo extiende. Esto conduce a la proposición 4.2 de [4]:

*Proposición:* Es equivalente:

- La obstrucción  $\gamma(\rho_1) = 0$
- Existe una familia  $\{\pi_i \in \Sigma(V_i)\}$  con  $\rho_1 = \pi = 1$  y que para todo  $i, j$ :  $\pi_i|_{U_{i,j}} = \pi_j|_{U_{i,j}}$



## 4.4. Curvatura

Con base en elementos de la anterior construcción, es posible determinar una estructura geométrica bastante interesante sobre la categoría de contextos  $\mathcal{C}$ . La manera de hacerlo es utilizando herramientas de la geometría combinatoria para así construir una noción de Laplaciano  $\square_p$  sobre los elementos de cada grupo de  $p$ -cocadenas, que reproduzca resultados semejantes al teorema de Hodge combinatorio sobre variedades. Este Laplaciano puede descomponerse a través de un análogo a la fórmula de Bocher-Weitzenböck:

$$\square_p = B_p + F_p$$

Dónde  $B_p$  es el Laplaciano combinatorio de Bochner y  $F_p$  la  $p$ -función de curvatura.

El primer paso es definir el operador adjunto al codiferencial  $d$  utilizando el producto interior dado en cada espectro a través de la traza (Hilbert-Schmidt). Es decir, dados  $\rho_1, \rho_2 \in \Sigma(C)$  tenemos que:

$$\langle \rho_1, \rho_2 \rangle = \text{Tr}(\rho_1 \rho_2)$$

Dónde se ha utilizado el hecho de que los elementos de  $\Sigma(C)$  se representan mediante objetos autoadjuntos. Esta expresión canónicamente induce un producto interior sobre los elementos de los grupos  $C^p(S, \Sigma)$  en la forma:

$$\langle s, t \rangle_p = \sum_{I \in \tau_p(S)} \text{Tr}(s(I)t(I))$$

Dónde  $\tau_p(S)$  es el conjunto de todos los  $p$ -símplices en el recubrimiento  $S$ . Teniendo esto, es posible introducir la definición para el codiferencial  $\delta$ :

$$\langle ds, t \rangle_p = \langle s, \delta t \rangle_{p-1}$$

Con  $s \in C^{p-1}(S, \Sigma)$  y  $t \in C^p(S, \Sigma)$ . Utilizando la forma explícita del producto interior, se tiene:

$$\langle ds, t \rangle = \sum_{I \in \tau_p(S)} \text{Tr}(ds(I)t(I)) = \sum_{I \in \tau_p(S)} \sum_{j=0}^p (-1)^j \text{Tr}(s(\partial_j I)|_I t(I))$$

La proyección al símplice  $I$  se hace a través de un proyector  $P_I$  en la forma  $\rho|_I = P_I \rho P_I$ , luego la anterior expresión puede escribirse como:

$$\langle ds, t \rangle = \sum_{I \in \tau_p(S)} \sum_{j=0}^p (-1)^j \text{Tr}(s(\partial_j I)t(I)|_I)$$

Utilizando el hecho de que la traza es cíclica. Esto permite asignar la siguiente forma al codiferencial dentro del producto interior:

$$\langle s, \delta t \rangle = \sum_{I \in \tau_{p-1}(S)} \sum_{j=0}^{p-1} (-1)^j \text{Tr}(s(I)t(\partial_j^* I)|_{\partial_j^* I})$$

Es decir, explicitando el orden del operador<sup>6</sup>:

$$\delta_p t(I) = \sum_{j=0}^{p-1} (-1)^j t(\partial_j^* I)|_{\partial_j^* I}$$

Dónde se ha planteado el operador  $\partial_j^* : \tau_{p-1}(S) \rightarrow \tau_p(S)$  que actúa sobre los  $(p-1)$ -símplices agregando un término  $j$ -ésimo que lo convierte en un  $p$ -símplice; es decir, dado  $\sigma \in \tau_{p-1}(S)$ ,  $\partial_j^* \sigma = \sigma \cup U_j$  dónde  $j$  numera el conjunto de  $p$ -símplices  $K$  tal que para  $k \in K$ ,  $k \cap \sigma \neq \emptyset$ . Con base a estos dos operadores, es posible entonces definir el *Laplaciano de Hodge* combinatorio:

$$\square_p = d_p \delta_p + \delta_{p+1} d_{p+1} : C^p(S, \Sigma) \rightarrow C^p(S, \Sigma)$$

La acción explícita del laplaciano sobre una  $p$ -cocadena  $s$  definida sobre un  $p$ -símplice  $\sigma$ :

$$\square_p(s)(\sigma) = \sum_i^p \sum_j^{p-1} (-1)^{i+j} s(\partial_i \partial_j^* \sigma)|_{\partial_j^* \sigma} + \sum_k^p \sum_l^{p+1} (-1)^{k+l} s(\partial_k^* \partial_l \sigma)|_{\partial_k^* \sigma}$$

Teniendo esto, es posible establecer la siguiente relación entre el kernel de  $\square_p$  y los grupos de cohomología explorados en la sección anterior:

$$\ker \square_p \simeq H^p(\Sigma, S)$$

La demostración es estándar y se presenta a continuación.

### **Teorema:**

- $\text{Ker } d_{p+1} \cap \text{ker } \delta_p = \text{Ker } \square_p$
- $\text{Ker } \square_p \simeq H^p(\Sigma, S)$

*D/.*

- De la definición de  $\square_p$  se tiene que  $\text{Ker } d_{p+1} \cap \text{Ker } \delta_p \subseteq \text{Ker } \square_p$ . Ahora, sea  $c \in \text{Ker } \square_p$  entonces claramente  $\langle \square_p(c), c \rangle = 0$ . Utilizando la definición del Laplaciano de Hodge y la linealidad del producto interior  $\langle (d_p \delta_p + \delta_{p+1} d_{p+1})(c), c \rangle = \langle (d_p \delta_p)(c), c \rangle + \langle (\delta_{p+1} d_{p+1})(c), c \rangle = 0$ . Sin embargo, teniendo que  $d$  y  $\delta$  son adjuntos,  $\langle \delta_p(c), \delta_p(c) \rangle + \langle d_{p+1}(c), d_{p+1}(c) \rangle = 0$  con lo que se tiene finalmente que  $d_{p+1}(c) = 0$  y  $\delta_p(c) = 0$ .
- Utilizando que cada espacio de  $p$ -cocadenas se puede descomponer ortogonalmente en el kernel de  $d_{p+1}$  y la imagen de  $\delta_{p+1}$ , se reescribe el resultado anterior  $\text{Ker } d_{p+1} \cap (\text{Im } d_p)^\perp \simeq \text{ker } d_{p+1} / \text{Im } d_p$ . □

<sup>6</sup>Si  $d_{p+1} : C^p \rightarrow C^{p+1}$ ,  $\delta_{p+1} : C^{p+1} \rightarrow C^p$

En consecuencia, se tiene para  $p = 0$ :

$$\ker \square_0 = \ker d_1 = \{s|s(U_i) \mid U_i \cap U_j - s(U_j) \mid U_i \cap U_j = 0\}_{(U_i, U_j) \in \tau_1(S)} \simeq H^0(\Sigma, S)$$

Retomando el resultado de que los elementos del grupo de cohomología  $H^0(\Sigma, S)$  son las familias compatibles. Ahora se introduce la descomposición combinatoria de Bochner-Weitzenböck [20].

Dada una matriz simétrica  $A = (A_{ij})$  de dimensión  $n$ , esta se puede descomponer en la forma:

$$A = B(A) + F(A)$$

Dónde  $B(A)$  es una matriz simétrica de dimensión  $n$  cuyos elementos están determinados en la forma:

$$B_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & i \neq j \\ \sum_{i \neq j} |A_{ij}| & i = j \end{cases}$$

Mientras que  $F(A)$  es también una matriz simétrica de dimensión  $n$  con elementos:

$$F_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ A_{ij} - \sum_{i \neq j} |A_{ij}| & i = j \end{cases}$$

Dónde a  $B(A)$  se le denomina la matriz de Bochner asociada a  $A$  y  $F(A)$  es la matriz de curvatura asociada a  $A$ .

Utilizando este hecho, es posible hacer una descomposición de ese estilo para la representación matricial del laplaciano de Hodge con componentes:

$$\square_p(i, j) = \langle \alpha_i^p, \square_p \alpha_j^p \rangle$$

Dónde los objetos  $\alpha_i$  son elementos de una base ortogonal para cada grupo de cocadenas  $C^p(S, \Sigma)$ . Estas bases se pueden construir directamente tomando  $\alpha_i^p$  como una  $p$ -cocadena que en cada  $p$ -símplice, representado por un contexto  $V$ , toma un elemento  $P_i^V$  de la base diagonalizante (capítulo 2. Sección 2.4) del contexto  $V$ . Es decir  $\alpha_i^p(V) = P_i^V$ . Con esto, es posible encontrar una forma explícita de los elementos matriciales del laplaciano de Hodge:

$$\begin{aligned} \square_p(i, j) &= \sum_{I \in \tau_p(S)} \text{Tr}(\alpha_i(I) \square_p \alpha_j(I)) \\ &= \sum_{I \in \tau_p(S)} \text{Tr}(\alpha_i(I) (d_p \delta_p + \delta_{p+1} d_{p+1}) \alpha_j(I)) \\ &= \sum_{I \in \tau_p(S)} \text{Tr}(\alpha_i(I) (d_p \delta_p) \alpha_j(I)) + \sum_{I \in \tau_p(S)} \text{Tr}(\alpha_i(I) (\delta_{p+1} d_{p+1}) \alpha_j(I)) \\ &= \sum_{I \in \tau_p(S)} \text{Tr}(\delta_p \alpha_i(I) \delta_p \alpha_j(I)) + \sum_{I \in \tau_p(S)} \text{Tr}(d_{p+1} \alpha_i(I) d_{p+1} \alpha_j(I)) \end{aligned}$$

Dado que las imágenes de cada uno son proyecciones, los sumandos de la expresión anterior serán diferentes de cero cuando:

$$\begin{aligned}\alpha_i(\partial_k^* I)|_{\partial_k^* I} &= \alpha_j(\partial_l^* I)|_{\partial_l^* I} \\ \alpha_i(\partial_k I)|_I &= \alpha_j(\partial_l I)|_I\end{aligned}$$

Que son los términos presentes en los elementos de la sumatoria en la definición del diferencial y el codiferencial.

Ahora, podemos hacer la descomposición de Bochner-Weitzenböck para  $\square_p$ :

$$\begin{aligned}B_p(i, j) &= \begin{cases} \square_p(i, j) & i \neq j \\ \sum_{i \neq j} |\square_p(i, j)| & i = j \end{cases} \\ F_p(i, j) &= \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \square_p(i, j) - \sum_{i \neq j} |\square_p(i, j)| & i = j \end{cases}\end{aligned}$$

Con esto definimos finalmente la  $p$ -curvatura de una  $p$ -cocadena  $c$  mediante la expresión de R. Forman [20]:

$$\mathcal{F}_p(c) = \langle c, F_p(c) \rangle$$

Es particularmente interesante el caso  $p = 1$ , como comenta R. Forman, por la analogía que se puede hacer con el caso Riemanniano:

$$\text{Ric}(c) = \mathcal{F}_1(c)$$

Dónde  $\text{Ric}(c)$  es la *curvatura de Ricci* para la 1-cocadena  $c$ . Hacemos el cálculo explícito de la acción del laplaciano para  $p = 1$  sobre los elementos  $\alpha$ , usando que todo 1-símplice tiene la forma  $(U_a, U_b)$ , con  $U_a, U_b$  contextos en  $\mathcal{C}$ :

$$\begin{aligned}\square_1(\alpha_i)(U_a, U_b) &= \sum_i^1 (-1)^i \alpha_i(\partial_i \partial_0^*(U_a, U_b))|_{\partial_0^*(U_a, U_b)} + \sum_k^1 \sum_l^2 (-1)^{k+l} \alpha_j(\partial_k^* \partial_l(U_a, U_b))|_{\partial_k^*(U_a, U_b)} \\ &= \alpha_i(U_a, U_c)|_{U_a, b, c} - \alpha_i(U_b, U_c)|_{U_a, b, c} + \alpha_i(U_b, U_c)|_{U_a, b, c} - \alpha_i(U_a, U_c)|_{U_a, b, c} + \\ &\quad \alpha_i(U_a, U_b)|_{U_a, b, c} - \alpha_i(U_b, U_c)|_{U_a, b, c} + \alpha_i(U_a, U_c)|_{U_a, b, c} \\ &= \alpha_i(U_a, U_b)|_{U_a, b, c} - \alpha_i(U_b, U_c)|_{U_a, b, c} + \alpha_i(U_a, U_c)|_{U_a, b, c}\end{aligned}$$

Sabemos que si  $\alpha_i$  hace que la anterior expresión sea cero, entonces  $\alpha_i \in H^1(\Sigma, S)$ . Utilizando esto dentro del producto interior:

$$\langle \alpha_i, \square \alpha_j \rangle_1 = \sum_{(a,b) \in \tau_1(S)} \text{tr}(\alpha_i(a, b)(\alpha_j(a, b)|_{a, b, c} - \alpha_j(b, c)|_{a, b, c} + \alpha_j(a, c)|_{a, b, c})) \quad (4-1)$$

$$= \sum_{(a,b) \in \tau_1(S)} \text{tr}(\alpha_i(a, b)) \delta_{ij} + \sum_{(a,b) \in \tau_1(S)} \text{tr}(\alpha_i(a, b)(\alpha_j(a, c)|_{a, b, c} - \alpha_j(b, c)|_{a, b, c})) \quad (4-2)$$

Dónde se ha tenido en cuenta que los  $\alpha_i$  evaluados en los símlices son proyecciones y por lo tanto  $\alpha_i(I)^2 = \alpha_i(I)$ .

Es importante notar que las construcciones anteriores pueden definirse sobre nociones de cubrimiento que, en general, pueden no ser estáticas. Este es el caso de la topología de Grothendieck entrópica introducida al final del tercer capítulo. Dada la dependencia que tiene esta topología de un estado  $\rho$ , tenemos que así como en general los estados obedecen una ley dinámica, de la misma manera los cubrimientos que esta topología induce sobre cada contexto, cambiarán continuamente en el tiempo. Es decir, ahora todas las cantidades, desde los elementos en los grupos de cocadenas  $C^p(S_\rho, \Sigma)$ , los elementos de los grupos de cohomología  $H^p(S_\rho, \Sigma)$  y las recientemente descritas cantidades geométricas, en particular, la curvatura de Ricci,  $\text{Ric}(c_\rho)$ , dependen del tiempo.

Una aproximación posible para el caso de la curvatura consiste en construir un *flujo de Ricci* [37] sobre las secciones de los funtores espectrales, sin embargo esta aproximación se relega a un trabajo futuro.

## 5. Lógica de Haces

Las construcciones hechas hasta el momento invitan a pensar las proposiciones de la mecánica cuántica, localizadas, en el sentido de que la construcción en topos condensa la información física relativa a contextos, y la información entre diferentes contexto es entendida a través de los morfismos que existen entre ellos en el marco del sitio base para el topos de prehaces que se ha discutido. Por otro lado, queda la pregunta sobre la posibilidad de caracterizar información *global*, común a todos los contextos o cierta colección adecuada de ellos. El teorema de Kochen-Specker discutido en el capítulo anterior determina fuertes condiciones al respecto y restringe la existencia de tal información en el caso general. Sin embargo, es posible pensar en construir *la mejor aproximación* posible que se puede hacer a estructuras globales, partiendo de información puramente local. Es a este proceso a lo que se denomina *hacificación*.

El objetivo de este capítulo será la hacificación de los funtores espectrales comentados en los capítulos anteriores, en términos de la topología entrópica. La hacificación generará equivalencias entre diferentes elementos espectrales bajo los criterios de la topología, de manera que así se pierda información de algún tipo durante las equivalencias, otro tipo de información específica puede ser seleccionada.

Más allá, un escenario particular de hacificación es el denominado *modelo genérico*. Esta construcción es interesante en la medida de que viene acompañada de teoremas fuertes [12] (T. del modelo genérico, t. de Loś) que condensan buena parte de la información local en un solo escenario.

### 5.1. Hacificación

Hasta el momento, los objetos fundamentales en las construcciones que se han llevado a cabo han sido prehaces, es decir, elementos del topos  $\mathbf{Set}^{cop}$ , o lo que es lo mismo, funtores contravariantes desde la categoría de los contextos a la categoría de conjuntos. Sin embargo, habiendo equipado al topos de prehaces con una topología  $j$  de Lawvere-Tierney, como se hizo al final del capítulo 3, es posible introducir una nueva familia de objetos denominados *haces* (Apéndice A). Retomando las nociones de familia compatible<sup>1</sup> y amalgamación introducidas en el capítulo anterior, es posible introducir la siguiente definición.

---

<sup>1</sup>O elementos de  $H^0(\Sigma, S)$

**Definición 5.1.1.** *Dado un sitio  $(\mathcal{C}, J)$ , sobre una categoría pequeña  $\mathcal{C}$ , un prehaz  $P \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$ , es un haz respecto a  $J$ , si para toda familia compatible  $s$  respecto a un cubrimiento  $S \in J(V)$  de un contexto  $V$ , existe una amalgamación única en  $\Sigma(V)$  para esa familia.*

En nuestra interpretación del funtor espectral, eso quiere decir que un eventual *haz espectral* selecciona estados que se descomponen de manera única respecto a subcontextos. Esto quiere decir, como se discutió en el segundo capítulo, que un estado sobre un contexto puede ser reconstruído a partir de sus proyecciones en contextos menores en el orden, tal como en la física clásica.

En las construcciones sobre topos todo prehaz se puede convertir en un haz, habiendo fijado previamente alguna topología de Grothendieck sobre la categoría base. Esto se expresa en el siguiente teorema.

**Teorema 5.1.1.** *([29]) Sea  $J$  una topología de Grothendieck sobre la categoría  $\mathcal{C}$ . El funtor inclusión  $i : \mathbf{Sh}(\mathcal{C}, J) \rightarrow \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$  de los haces sobre el sitio  $(\mathcal{C}, J)$  a los prehaces contravariantes, posee un adjunto a izquierda  $\mathbf{a} : \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}} \rightarrow \mathbf{Sh}(\mathcal{C}, J)$ . Este funtor  $\mathbf{a}$  conmuta con límites finitos.*

A este funtor  $\mathbf{a}$  usualmente se le denomina el *funtor hacificación* y su acción sobre un prehaz  $P$ ,  $\mathbf{a}(P)$  se denomina la hacificación de  $P$ . La construcción de esta hacificación se puede realizar utilizando la construcción plus de Grothendieck.

**Definición 5.1.2.** *Dado un prehaz  $P$ , se define  $P^+(U)$  como la colección de clases de equivalencia entre elementos  $(R, a)$ , dónde  $R \in J(U)$  y  $a \in H^0(\Sigma, R)$  una familia compatible, tal que  $(R, a) \sim (R', a')$  si y solo si existe un refinamiento  $T \subseteq R \cap R'$  con  $T \in J(U)$ , dónde las familias compatibles  $a = a'$  coinciden.*

El funtor  $P^+$  no es necesariamente un haz, pero sí es *separado*. Un prehaz se denomina separado si cada familia compatible posee al menos una amalgamación. Es decir, para  $\omega_1, \omega_2 \in \Sigma(V)$  y un cubrimiento de  $V$ ,  $S \in J(V)$ , entonces  $\omega_1|_W = \omega_2|_W$  para todo  $W \in S$  implica  $\omega_1 = \omega_2$ . Para completar el proceso de hacificación, la construcción plus es un funtor que debe aplicarse dos veces.

$$\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}} \xrightarrow{(-)^+} \mathbf{SepPSh}(\mathcal{C}, J) \xrightarrow{(-)^+} \mathbf{Sh}(\mathcal{C}, J)$$

En este sentido, para un prehaz  $P$  la hacificación  $\mathbf{a}(P)$  puede escribirse como:

$$\mathbf{a}(P) = P^{++}$$

Una forma equivalente de realizar la construcción plus, es utilizando la definición a través del colímite:

$$P^+ = \lim_{\rightarrow S \in J(V)} H^0(P, S)$$

Dónde el colímite se está tomando sobre todos los cubrimientos del objeto  $V$ , ordenados por el inverso de la inclusión.

Ahora, buscando hacer una hacificación del funtor espectral  $\Sigma$ , es importante notar que este prehaz es no separado, dado que la condición de compatibilidad implica que todo estado sobre un contexto  $V$  puede ser reconstruido desde sus proyecciones:

$$\sum_i P_i^W \rho_1^V P_i^W = \sum_i P_i^W \rho_2^V P_i^W, \quad \forall W \in S \iff \rho_1^V = \rho_2^V$$

Un contraejemplo es un sistema de Bell  $\mathbb{H}_V \simeq \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ , con  $V$  un contexto de la forma  $V = \{\sigma_z \otimes \mathbf{1}_B, \mathbf{1}_A \otimes \sigma_z, \sigma_z \otimes \sigma_z\}$ . Tomando dos estados de Bell en términos de su representación como matrices densidad:

$$\rho_+ = |00\rangle \langle 00| + |00\rangle \langle 11| + |11\rangle \langle 00| + |11\rangle \langle 11| \quad (5-1)$$

$$\rho_- = |00\rangle \langle 00| - |00\rangle \langle 11| - |11\rangle \langle 00| + |11\rangle \langle 11| \quad (5-2)$$

Al realizar las proyecciones sobre cada uno de los factores en el producto tensorial del espacio de Hilbert:

$$\rho_+^A = \rho_-^A = \frac{1}{2} |0_A\rangle \langle 0_A| + |1_A\rangle \langle 1_A| = \frac{\mathbf{1}_A}{2}$$

$$\rho_+^B = \rho_-^B = \frac{1}{2} |0_B\rangle \langle 0_B| + |1_B\rangle \langle 1_B| = \frac{\mathbf{1}_B}{2}$$

Vemos que ambos estados proyectan a los mismos subespacios de la misma manera, sin embargo, los estados son diferentes. De hecho, estos estados son ejemplos típicos de *estados entrelazados*, y de hecho, maximalmente entrelazados. En general, la no separabilidad es equivalente a la existencia de entrelazamiento.

De esta manera, sea realiza el primer paso de la construcción plus para el espectro de Gel'fand. Utilizando la definición de colímite para la construcción plus, definimos el funtor:

$$\Sigma^+ = H^0(-, \Sigma) = \lim_{\rightarrow S \in J(-)} H^0(-, \Sigma)$$

Este funtor actúa sobre la categoría de contextos y asigna a cada objeto de la categoría, la colección de clases de equivalencia de familias compatibles a través de todos los cubrimientos del contexto. Fijando un contexto  $V$ , es posible mapear cada elemento en  $\Sigma(V)$  a un elemento en  $\Sigma^+(V)$  utilizando el mapeo canónico [29]:

$$\eta_V(\omega) = [\{\omega|_X | X \in \downarrow V\}]$$

Que para el caso del prehaz espectral, a cada estado  $\omega$  sobre el contexto  $V$ , le asigna la clase de equivalencia que le corresponde a la familia compatible generada por la proyección de  $\omega$  en todos los elementos del cubrimiento maximal. Un hecho interesante, a primera vista, es



la desaparición de la no separabilidad manifiesta en el contraejemplo de los estados de Bell. En ese sentido, el primer paso de la construcción plus es eliminar la posibilidad de estados entrelazados.

La situación en este punto es interesante dado que la construcción plus necesita de una doble ejecución para constituir una hacificación completa, sin embargo, la eliminación de los estados entrelazados dentro del panorama de posibles estados para un sistema físico, ocurrió en el primer estadio de la construcción, lo que ciertamente indica que aún queda información cuántica en el prehaz  $\Sigma^+$ , que va más allá del entrelazamiento. El morfismo  $\eta$  posee la siguiente propiedad.

**Lema 5.1.2.** [29]

- *Un prehaz  $P$  es separado sí y solo sí  $\eta : P \rightarrow P^+$  es un monomorfismo.*
- *Un prehaz  $P$  es un haz sí y solo sí  $\eta : P \rightarrow P^+$  es un isomorfismo.*

De esta manera, sabiendo que  $\Sigma^+$  es separado, el lema anterior implica que en la acción de este prehaz existen secciones compatibles para las que no existe amalgamación. Es decir, no toda colección de estados compatibles ante proyecciones a subespacios comunes se traduce en un estado para un contexto. Esto profundiza en la idea de que, cuánticamente, no es posible *en general* reconstruir información global de un sistema solamente utilizando mediciones *locales* (relativas a subcontextos).

## 5.2. Topos Clasificante y Modelo Genérico

Dada una teoría  $\mathbb{T}$  y una categoría  $\mathcal{E}$ , denominamos como *T-modelos* en  $\mathcal{E}$  a todos los modelos de  $\mathbb{T}$  que son objetos de  $\mathcal{E}$ . En general, podemos denotar como  $\text{Mod}(\mathcal{E}, \mathbb{T})$  al conjunto de todos estos modelos en  $\mathcal{E}$ . Esta colección, teniendo en cuenta los morfismos inducidos por  $\mathbb{E}$ , conforma una categoría y además un funtor contravariante sobre  $\mathbb{E}$ . Teniendo esto

**Definición 5.2.1.** [29] *Un topos clasificante para  $\mathbb{T}$ -modelos es un topos  $\mathcal{H}(\mathbb{T})$  sobre la categoría de conjuntos **Set** tal que para todo topos cocompleto  $\mathcal{E}$  existe una equivalencia de categorías:*

$$\text{Mod}(\mathcal{E}, \mathbb{T}) \simeq \text{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{H}(\mathbb{T}))$$

Un objeto esencial del topos clasificante de una teoría, es el denominado  $\mathbb{T}$ -modelo genérico (o universal)  $U_{\mathbb{T}}$  que corresponde a la identidad sobre  $\mathcal{H}(\mathbb{T})$  en términos de la equivalencia entre categorías presentada en la definición de topos clasificante, para  $\mathcal{E} = \mathcal{H}(\mathbb{T})$ . Este modelo genérico posee la propiedad de que todo  $\mathbb{T}$ -modelo  $M$  en una categoría arbitraria  $\mathcal{E}$  satisface (salvo isomorfismo)  $M \simeq f^*(U_{\mathbb{T}})$ , dónde  $f$  es un morfismo geométrico  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{H}(\mathbb{T})$ .

Un hecho útil a la hora de construir un topos clasificante es la siguiente igualdad:

$$\mathcal{H}(\mathbb{T}) = \text{Sh}(\mathbf{H}(\mathbb{T}), J(\mathbb{T}))$$

Que identifica todo topos clasificante para una teoría  $\mathbb{T}$  con la categoría de haces generados sobre el denominado *sitio sintáctico* formado por la categoría sintáctica de la teoría, equipada con una topología de Grothendieck adecuada, dependiente de la teoría. Sin embargo, si la teoría es proposicional, tenemos que su categoría sintáctica  $\mathbf{H}(\mathbb{T})$  es equivalente a su álgebra de Lindenbaum-Tarski [25]. Del capítulo anterior, recordamos que el álgebra de Lindenbaum-Tarski asociada a la categoría de contextos  $\mathcal{C}$  a través de la representación GNS de cada contexto, es exactamente el retículo de todas las subálgebras booleanas de proyectores  $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ .

Sin embargo, lo que se busca no es reconstruir la teoría de la representación  $(H, \rho)$ , lo que necesitaría de una topología específica sobre la categoría sintáctica, sino definir una nueva semántica, para una teoría distinta, utilizando la topología entrópica. La existencia de esta teoría se garantiza teniendo en cuenta que todo topos  $\text{Sh}(\mathcal{C}, J)$  es equivalente al topos clasificante de alguna teoría geométrica [25]. Teniendo en cuenta esto se presenta la semántica de Kripke-Joyal para el topos de haces  $\text{Sh}(\mathcal{C}, J_\rho)$ . Dadas  $\phi(x)$  y  $\psi(x)$  fórmulas en el lenguaje del topos<sup>2</sup>, dos variables libres  $x \in U \subseteq X$ ,  $y \in V \subseteq Y$ , para  $X$  un haz y  $\alpha \in X(C)$ , con  $C$  contexto.

1.  $C \Vdash \phi(\alpha) \wedge \psi(\alpha)$  si y solo si  $C \Vdash \phi(\alpha)$  y  $C \Vdash \psi(\alpha)$
2.  $C \Vdash \phi(\alpha) \vee \psi(\alpha)$  si y solo si existe  $S \in J_\rho(C)$  tal que para todo elemento  $i$ -ésimo,  $S_i \in S$ , se tiene que  $S_i \Vdash \phi(\alpha|_{S_i})$  o  $S_i \Vdash \psi(\alpha|_{S_i})$
3.  $C \Vdash \phi(\alpha) \rightarrow \psi(\alpha)$  si y solo si para todo  $D \subseteq C$ ,  $D \Vdash \phi(\alpha|_D)$  implica  $D \Vdash \psi(\alpha|_D)$
4.  $C \Vdash \neg\phi(\alpha)$  si y solo si para todo  $D \subseteq C$  en  $\mathcal{C}$ , si  $D \Vdash \phi(\alpha|_D)$ , entonces la familia vacía es cubrimiento de  $D$
5.  $C \Vdash \exists y\phi(\alpha, y)$  si y solo si existe  $S \in J_\rho(C)$  y elementos  $\beta_i \in Y(C)$  tales que para todo elemento  $i$ -ésimo,  $S_i \Vdash \phi(\alpha|_{S_i}, \beta_i)$
6.  $C \Vdash \forall y\phi(\alpha, y)$  si y solo si para todo  $D \subseteq C$  en  $\mathcal{C}$  y todo  $\beta \in Y(C)$ , se tiene que  $D \Vdash \phi(\alpha|_D, \beta)$

Con lo cual queda enteramente descrita la verdad en el topos  $\text{Sh}(\mathcal{C}, J_\rho)$ .

<sup>2</sup> Es decir, morfismos que envían un haz en el clasificador de subobjetos  $\tilde{\Omega}$ , dónde este último, naturalmente, a cada haz le asigna su familia de subhaces.

## 6. Conclusiones

- Se presenta el formalismo de prehaces para la mecánica cuántica en sus diferentes formatos, en términos de su categoría base, recapitulando trabajos anteriores [22, 23], e introduciendo la posibilidad de generar además *sitios* introduciendo topologías métricas, en particular, una topología determinada por la información relativa a un estado físico arbitrario, en términos de la entropía condicional entre contextos.
- Se estudia la extendibilidad de las secciones para los prehaces espectrales utilizando la cohomología de prehaces, caracterizando condiciones bajo las cuales una colección de estados físicos definidos sobre diferentes contextos son compatibles en términos de una topología base.
- Se muestra la conexión que existe entre los elementos del prehaz espectral sobre la categorías de contextos y el álgebra de Lindenbaum-Tarski de una teoría y su correspondiente espacio de tipos.
- Se formaliza una noción de curvatura para las secciones del prehaz espectral y se encuentra la existencia de una teoría de Hodge para el estudio de álgebras en términos de sus espacios duales (espectros)
- Se estudia el paso de prehaces a haces encontrando que el nuevo topos generado sobre la categoría de contextos es el topos clasificante de una teoría de la cual se extrae su semántica a través de la semántica de Kripke-Joyal para haces. Esto es equivalente al estudio del modelo genérico teniendo en cuenta que este es igual al endofunctor identidad en el topos.

# A. Teoría de Topos

*Definición:* Una categoría  $\tau$  es un topos si posee las siguientes características:

- Existe un objeto terminal  $1_\tau$ . Esto es, un objeto tal que para cualquier otro objeto  $A$  en la categoría, existe un único morfismo  $A \rightarrow 1_\tau$ .<sup>1</sup>
- Existe un objeto inicial  $0_\tau$ . Esto es, un objeto tal que para cualquier otro objeto  $A$  en la categoría, existe un único morfismo  $0_\tau \rightarrow A$ .
- Dados objetos  $A, B$  en  $\tau$ , es posible definir un objeto  $A^B$  que es el análogo del conjunto de las funciones con dominio en  $B$  y codominio  $A$ , en la categoría de conjuntos. La característica fundamental de este elemento es que dado un tercer elemento  $C$ , existe un isomorfismo:

$$\text{Hom}_\tau(C, A^B) \cong \text{Hom}_\tau(C \times B, A)$$

- Existe un clasificador de subobjetos  $\Omega_\tau$

En el caso de la categoría de conjuntos **Set**, estas condiciones implican la existencia de un producto cartesiano  $S \times T$ , una unión disyunta  $S \sqcup T$  y el conjunto de funciones  $S^T$ , para  $S$  y  $T$  conjuntos. Formalmente se dice que una categoría que cumpla estas condiciones entonces posee operaciones *producto*, *coproducto* y *exponencial*.

En particular, un ejemplo típico de topos son las categorías de haces **Sh** y prehaces **PSh**. Para entender cómo están constituidas estas categorías, es preciso definir haces en el sentido categórico, lo que precisa la introducción de la noción de *sitio* que es un par  $(C, J)$  dónde  $C$  es una categoría y  $J$  una *topología de Grothendieck*.

*Definición:* Una topología de Grothendieck sobre una categoría  $C$  es una función  $J$  que asigna a cada objeto  $c \in \text{Ob}(C)$  una colección  $J(c)$  de cubrimientos<sup>2</sup> de  $c$  que satisface:

- El cubrimiento maximal  $t_c = \{f \mid \text{cod}(f) = c\}$  se encuentra en  $J(c)$
- Si  $S \in J(c)$ , entonces  $h^*(S) \in J(d)$ <sup>3</sup> para cualquier morfismo  $h : d \rightarrow c$
- Si  $S \in J(c)$  y  $R$  es cualquier recubrimiento de  $c$  tal que  $h^*(R) \in J(d)$  para todo  $h : d \rightarrow c$  en  $S$ , entonces  $r \in J(c)$

---

<sup>1</sup>Un morfismo  $1_\tau \rightarrow A$  se denomina un elemento global de  $A$ . El conjunto de todos los elementos globales se denomina  $\Gamma A$

<sup>2</sup>Un cubrimiento  $S$  de  $c$  es solo una colección de morfismos con codominio  $c$

<sup>3</sup> $h^*(S) = \{g \mid \text{cod}(g) = D, hg \in S\}$

Ahora sea  $P$  un prehaz<sup>4</sup> definido sobre una categoría pequeña  $C$  equipada con una topología de Grothendieck  $J$ . Si  $S$  es un cubrimiento de  $c \in Ob(C)$ , una *familia compatible* para  $S$  de elementos de  $P$ , es una función que mapea cada morfismo  $f : d \rightarrow c$  de  $S$  en un elemento  $x_f \in P(d)$  de tal manera que  $P(g)(x_f) = x_{fg}$  para todo  $g : e \rightarrow d$  en  $C$ . Una *amalgamación* de esta familia compatible es un elemento  $x \in P(c)$  con  $P(f)(x) = x_f$  para todo  $f \in S$ . Teniendo esto es posible entonces introducir la transición de prehaz a haz.

*Definición:* Un prehaz  $P$  es un haz para la topología de Grothendieck  $J$  cuando toda familia compatible, para cualquier cubrimiento de un objeto en  $C$ , tiene una única amalgamación.

Uno de los elementos centrales de esta tesis es el conectivo lógico que aparece naturalmente en un topos de prehaces definidos sobre un sitio, de manera equivalente a la topología de Grothendieck. Este conectivo es la denominada topología de Lawvere-Tierney  $j : \Omega \rightarrow \Omega$ , con  $\Omega$  el clasificador de subobjetos en el topos  $\mathbf{Set}^{C^{op}}$ . En general, la topología de Lawvere-Tierney puede definirse sobre topos arbitrarios en la siguiente forma.

*Definición:* Una topología de Lawvere-Tierney en un topos  $\mathcal{E}$  es un morfismo  $j : \Omega \rightarrow \Omega$  en  $\mathcal{E}$  con propiedades:

$$\begin{array}{l} \blacksquare j \circ \text{true} = \text{true}: \quad \begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{\text{true}} & \Omega \\ & \searrow \text{true} & \downarrow j \\ & & \Omega \end{array} \\ \blacksquare j \circ j = j: \quad \begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{j} & \Omega \\ & \searrow j & \downarrow j \\ & & \Omega \end{array} \\ \blacksquare j \circ \wedge = \wedge \circ (j \times j): \quad \begin{array}{ccc} \Omega \times \Omega & \xrightarrow{\wedge} & \Omega \\ j \times j \downarrow & & \downarrow j \\ \Omega \times \Omega & \xrightarrow{\wedge} & \Omega \end{array} \end{array}$$

Finalmente, existe una manera formal de *hacificar* prehaces definidos sobre un sitio. Este proceso de hacificación logra asignar a cada prehaz un haz asociado según la topología de Grothendieck.

*Teorema:* El functor inclusión  $i : Sh(\mathcal{C}) \rightarrow PSh(\mathcal{C})$  que va de los haces a los prehaces definidos sobre  $\mathcal{C}$  posee un adjunto a izquierda  $a : PSh(\mathcal{C}) \rightarrow Sh(\mathcal{C})$ . Este functor se denomina el functor *hacificación* asociado.

<sup>4</sup>Un prehaz es un elemento  $P \in \mathbf{Set}^{C^{op}}$

## B. Información Cuántica

Aquí se introducen algunos elementos útiles sobre correlaciones en el marco de la teoría cuántica de la información [11].

El escenario de comunicación más sencillo es aquel que involucra dos observadores espacialmente separados (típicamente *Alice* y *Bob*), que interactúan con un sistema físico común a través de conjuntos de *mediciones* que cada uno puede ejecutar individualmente. <sup>1</sup>

En el caso cuántico, usualmente el sistema compartido es un par de partículas que se encuentran en un estado entrelazado. Dado un conjunto de mediciones  $\mathcal{M}$  y un conjunto de resultados para esas mediciones  $\mathcal{O}$ , podemos escribir la probabilidad  $p(ab|xy)$ , que es la probabilidad condicional de obtener resultados  $a$  y  $b$  luego de que *Alice* y *Bob* midan  $x$  y  $y$ , respectivamente. Lo que se tiene es que el escenario de comunicación entre las dos partes queda enteramente caracterizado por esas  $|\mathcal{M}|^2|\mathcal{O}|^2$  probabilidades. Estas probabilidades obedecen naturalmente condiciones de positividad y normalización, sin embargo, dependiendo del sistema físico, pueden aparecer más condiciones. Usualmente se distinguen tres tipos esenciales:

- Correlaciones No-Signalling  $\mathcal{NS}$ :

En este caso se impone además que:

$$\sum_{b=1}^{|\mathcal{M}|} p(ab|xy) = \sum_{b=1}^{|\mathcal{M}|} p(ab|xy') \quad (\text{B-1})$$

$$\sum_{a=1}^{|\mathcal{M}|} p(ab|xy) = \sum_{a=1}^{|\mathcal{M}|} p(ab|xy') \quad (\text{B-2})$$

Lo que significa que las probabilidades de que alguno de los agentes en comunicación obtenga un valor dada una medición propia, es independiente de las mediciones que el otro agente ejecute. En otras palabras,  $p(a|x) = p(a|xy) = \sum_{b=1}^{|\mathcal{M}|} p(ab|xy) = \sum_{b=1}^{|\mathcal{M}|} p(ab|xy')$ . Esto puede interpretarse como la imposibilidad de los agentes de comunicarle al otro su propio protocolo de medición.

---

<sup>1</sup>Matemáticamente, entonces, se puede entender un observador físico a través de un álgebra de mediciones que es fibra sobre un punto en alguna noción de espacio, típicamente, una variedad diferenciable.

- Correlaciones locales  $\mathcal{L}$ :

En este caso, las restricciones son las siguientes:

$$p(ab|xy) = \int_{\Lambda} d\lambda q(\lambda) p(a|x, \lambda) p(b|y, \lambda)$$

Dónde  $\lambda$  representa una familia de variables que toman valores en un espacio  $\Lambda$ , distribuidas de acuerdo a  $q(\lambda)$ .  $p(a|x, \lambda)$  y  $p(b|y, \lambda)$  son las probabilidades locales de respuesta para cada uno de los agentes.

Este tipo de correlaciones implican la anterior condición no-signalling, pero la dirección contraria no se tiene. Esto quiere decir que las correlaciones locales conforman un subconjunto dentro del conjunto de correlaciones no-signalling.

- Correlaciones cuánticas  $\mathcal{Q}$ :

En el caso de la mecánica cuántica se impone:

$$p(ab|xy) = \text{tr}(\rho_{ab} M_{a|x} \otimes M_{b|y})$$

Dónde  $\rho_{ab}$  es un estado cuántico asociado a los dos agentes, es decir, este puede ser representable a través de un elemento del espacio de Hilbert común  $\mathbb{H}_A \otimes \mathbb{H}_B$ , y los objetos  $M_{a|x}$  son operadores de medida que actúan sobre cada factor del producto tensorial de espacios<sup>2</sup>.

Toda correlación cuántica satisface las condiciones no-signalling, pero no necesariamente es local. Por otro lado, las correlaciones locales siempre pueden escribirse a través de la traza sobre algún estado particular.

Lo que se tiene entonces es la siguiente cadena de contenencias estrictas entre las familias de correlaciones.

$$\mathcal{L} \subset \mathcal{Q} \subset \mathcal{NS}$$

Notando que:

$$\dim \mathcal{L} = \dim \mathcal{Q} = \dim \mathcal{NS}$$

Estas familias son cerradas, acotadas y convexas.

---

<sup>2</sup>Generalmente, objetos del tipo POVM (*Positive-Operator Valued Measure*), es decir,  $M_{a|x} \geq 0$  and  $\sum_{a=1}^{|\mathcal{O}|} M_{a|x} = 1_A$

## C. Cohomología de Cech

Dada una categoría  $\mathcal{C}$ , una familia  $\mathcal{U} = \{U_i \rightarrow U\}_{i \in I}$  de morfismos con el mismo codominio, y un prehaz abeliano  $\mathcal{F}$  sobre  $\mathcal{C}$ , se define el siguiente grupo abeliano:

$$C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{(i_0, \dots, i_p) \in I^{p+1}} \mathcal{F}(U_{i_0} \times_U \dots \times_U U_{i_p})$$

Dónde  $U_i \times_U U_j$  representa el producto fibrado entre los elementos  $U_i, U_j$  de la categoría  $\mathcal{C}$ . Ahora, sea  $s \in C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$  elemento del grupo representado por sus componentes  $s_{i_0 \dots i_p}$ . Definimos ahora el operador:

$$d : C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

A través de la fórmula:

$$d(s)_{i_0 \dots i_{p+1}} = \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j s_{i_0 \dots \hat{i}_j \dots i_{p+1}} | U_{i_0} \times_U \dots \times_U U_{i_{p+1}}$$

Dónde la restricción se define a través de la proyección:

$$U_{i_0} \times_U \dots \times_U U_{i_{p+1}} \rightarrow U_{i_0} \times_U \dots \times_U \hat{U}_{i_j} \times_U \dots \times_U U_{i_{p+1}}$$

Se satisface que  $d \circ d = 0$ . De esa manera, podemos escribir el siguiente complejo:

$$C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \dots \xrightarrow{d} C^{p-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{d} C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{d} C^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{d} \dots$$

*Definición:* El complejo  $C^\circ(\mathcal{U}, \mathcal{F})$  se denomina el complejo de Cech asociado al prehaz  $\mathcal{F}$  y la familia  $\mathcal{U}$ . Sus respectivos grupos de cohomología  $H^i(C^\circ(\mathcal{U}, \mathcal{F}))$  son los grupos de cohomología de Cech, de  $\mathcal{F}$  respecto a  $\mathcal{U}$ . Por simplicidad se escriben como  $H^i(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ .

En particular, la familia  $\mathcal{U}$  puede ser cualquier cubrimiento definido en un sitio.



## D. $SU(4)$ y $SU(2) \otimes SU(2)$

En la base canónica, es posible escribir la siguiente representación matricial de los generadores de  $SU(4)$ :

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (D-1)$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (D-2)$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (D-3)$$

$$\lambda_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (D-4)$$

$$\lambda_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{15} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad (D-5)$$

$SU(2) \otimes SU(2)$  es subespacio de  $SU(4)$ . Es conveniente también escribir una representación matricial de los generadores de este subgrupo. Típicamente esto se hace utilizando las matrices de Pauli:

$$\sigma_1 \otimes \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 \otimes \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 \otimes \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D-6})$$

$$\sigma_2 \otimes \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 \otimes \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 \otimes \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D-7})$$

$$\sigma_2 \otimes \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 \otimes \sigma_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 \otimes \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D-8})$$

Algunos elementos  $\lambda$  pueden escribirse como combinación lineal de la base escrita en términos de las matrices  $\sigma$ .

# Bibliografía

[1]

[2] ABRAMSKY, Samson ; BRANDENBURGER, Adam: The sheaf-theoretic structure of non-locality and contextuality. En: *New Journal of Physics* 13 (2011), Nov, Nr. 11, p. 113036

[3] ABRAMSKY, Samson ; HARDY, Lucien: Logical Bell inequalities. En: *Phys. Rev. A* 85 (2012), Jun, p. 062114

[4] ABRAMSKY, Samson ; MANSFIELD, Shane ; BARBOSA, Rui S.: The Cohomology of Non-Locality and Contextuality. En: *QPL*, 2011

[5] BAEZ, John C. ; FRITZ, Tobias ; LEINSTER, Tom: A Characterization of Entropy in Terms of Information Loss. En: *Entropy* 13 (2011), Nov, Nr. 11, p. 1945–1957. – ISSN 1099–4300

[6] BALACHANDRAN, A. P. ; GOVINDARAJAN, T. R. ; DE QUEIROZ, Amilcar R. ; REYES-LEGA, A. F.: Algebraic approach to entanglement and entropy. En: *Phys. Rev. A* 88 (2013), Aug, p. 022301

[7] BANASCHEWSKI, Bernhard ; MULVEY, Christopher J.: The spectral theory of commutative C-algebras: The constructive spectrum. En: *Quaestiones Mathematicae* 23 (2000), Nr. 4, p. 425–464

[8] BEZHANISHVILI, Guram ; HOLLIDAY, Wesley H.: Locales, Nuclei, and Dragalin Frames. En: *Advances in Modal Logic*, 2016

[9] BIRKHOFF, Garrett: Lattice Theory. En: *Journal of Symbolic Logic* 5 (1940), Nr. 4, p. 155–157

[10] BIRKHOFF, Garrett ; NEUMANN, John V.: The Logic of Quantum Mechanics. En: *Annals of Mathematics* 37 (1936), Nr. 4, p. 823–843. – ISSN 0003486X

[11] BRUNNER, Nicolas ; CAVALCANTI, Daniel ; PIRONIO, Stefano ; SCARANI, Valerio ; WEHNER, Stephanie: Bell nonlocality. En: *Rev. Mod. Phys.* 86 (2014), Apr, p. 419–478

[12] CAICEDO, Xavier: Lógica de los haces de estructuras. En: *Rev. Acad. Colomb. Cienc.* 19 (1995), Nr. 74, p. 569–586

- [13] CAO, ChunJun ; CARROLL, Sean M. ; MICHALAKIS, Spyridon: Space from Hilbert space: Recovering geometry from bulk entanglement. En: *Phys. Rev. D* 95 (2017), Jan, p. 024031
- [14] CONSTANTIN, C. M. ; DOERING, A.: Contextual Entropy and Reconstruction of Quantum States. En: *ArXiv e-prints* (2012), August
- [15] CONSTANTIN, Carmen M.: *Sheaf-theoretic methods in quantum mechanics and quantum information theory*, University of Oxford, Tesis de Grado, 2015
- [16] DE GROOTE, H. F.: Observables I: Stone Spectra. En: *ArXiv Mathematical Physics e-prints* (2005), September
- [17] DÖRING, A ; HARDING, John: Abelian subalgebras and the Jordan structure of a von neumann Algebra. 42 (2016), 01, p. 559–568
- [18] DÖRING, Andreas: Spectral presheaves as quantum state spaces. En: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 373 (2015), Nr. 2047. – ISSN 1364–503X
- [19] DÖRING, Andreas ; ISHAM, Chris J.: Classical and quantum probabilities as truth values. En: *Journal of Mathematical Physics* 53 (2012), Mar, Nr. 3, p. 32101
- [20] FORMAN: Bochner’s Method for Cell Complexes and Combinatorial Ricci Curvature. En: *Discrete & Computational Geometry* 29 (2003), Feb, Nr. 3, p. 323–374. – ISSN 1432–0444
- [21] HEUNEN, Chris ; LANDSMAN, Nicolaas P. ; SPITTERS, Bas: Bohrification of operator algebras and quantum logic. En: *Synthese* 186 (2011), Mar, Nr. 3, p. 719–752
- [22] ISHAM, C. J.: En: *International Journal of Theoretical Physics* 37 (1998), Nr. 11, p. 2669–2733
- [23] In: ISHAM, Chris J.: *Topos Methods in the Foundations of Physics*. Cambridge University Press, 2011, p. 187–206
- [24] JOHNSTONE, P.T.: *Stone Spaces*. Cambridge University Press, 1986 (Cambridge Studies in Advanced Mathematics). – ISBN 9780521337793
- [25] JOHNSTONE, P.T.: *Sketches of an Elephant: A Topos Theory Compendium*. Clarendon Press, 2002 (Oxford logic guides)
- [26] LANDSMAN, Klaas: *Foundations of Quantum Theory*. Springer International Publishing, 2017

- [27] LANG, Matthias D. ; CAVES, Carlton M. ; SHAJI, Anil: Entropic measures of non-classical correlations. En: *International Journal of Quantum Information* 9 (2011), Oct, Nr. 07n08, p. 1553–1586
- [28] LINDENHOVIUS, B.: Grothendieck topologies on a poset. En: *ArXiv e-prints* (2014), Mai
- [29] MAC LANE, Saunders ; MOERDIJK, Ieke: *Sheaves in Geometry and Logic*. Springer New York, 1994
- [30] MONJARDET, B.: Metrics on partially ordered sets—A survey. En: *Discrete Mathematics* 35 (1981), Nr. 1–3, p. 173–184
- [31] NAKAYAMA, Kunji: Topologies on quantum topoi induced by quantization. En: *Journal of Mathematical Physics* 54 (2013), Nr. 7, p. 072102
- [32] OLLIVIER, Harold ; ZUREK, Wojciech H.: Quantum Discord: A Measure of the Quantumness of Correlations. En: *Phys. Rev. Lett.* 88 (2001), Dec, p. 017901
- [33] In: PITOWSKY, Itamar: *Quantum Mechanics as a Theory of Probability*. Springer Netherlands, p. 213–240
- [34] PULIDO, Camilo Enrique A.: *Model Theory of representations of operator algebras*. Diciembre 2015. – Doctor en Ciencias-Matemáticas. Línea de Investigación: Lógica Matemática
- [35] SEPANSKI, Mark R.: *Compact Lie Groups*. Springer New York, 2007
- [36] TENT, Katrin ; ZIEGLER, Martin: *A Course in Model Theory*. Cambridge University Press, 2012 (Lecture Notes in Logic)
- [37] WEBER, Melanie ; SAUCAN, Emil ; JOST, Jürgen: Characterizing complex networks with Forman-Ricci curvature and associated geometric flows. En: *Journal of Complex Networks* 5 (2017), 01, Nr. 4, p. 527–550. – ISSN 2051–1310
- [38] ZUREK, W.H.: Einselection and decoherence from an information theory perspective. En: *Annalen der Physik* 9, Nr. 11-12, p. 855–864