LA PROPIEDAD DEL ÁRBOL EN CARDINALES SUCESORES

Juan Camilo Arosemena Serrato

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogotá, D.C.
2014

LA PROPIEDAD DEL ÁRBOL EN CARDINALES SUCESORES

Juan Camilo Arosemena Serrato

Trabajo de grado presentado como requisito
parcial para optar al título de
Matemático

Director

Andrés Villaveces Niño
Carlos Di Prisco
Doctor en Matemáticas

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogotá, D.C.
2014

Título en español
La propiedad del árbol en cardinales sucesores

Title in English
The tree property at successor cardinals.

Resumen: Para un cardinal infinito κ, decimos que κ tiene la propiedad del árbol si cualquier árbol de áltura κ y niveles de tamaño menor que κ tiene una rama. Estudiamos la demostración de Mitchell[5] de la consistencia de la propiedad del árbol para $\aleph_2$ bajo cierto axioma de gran cardinal. Luego hacemos algunos cambios pequeños a la prueba de consistencia de la propiedad del árbol para $\aleph_2$ y $\aleph_3$ de [1] y estudiamos una prueba de este resultado usando encajes elementales, tomando ideas de [3].

Abstract: For an infinite cardinal κ, we say κ has the tree property if any tree of height κ and levels of size less than κ, has a branch. We study Mitchell's proof of the consistency of the tree propery at $\aleph_2$ under a large cardinal axiom. We then make some changes to the proof of the consistency of the tree property for $\aleph_2$ and $\aleph_3$ in [1] and study a proof of this result using elementary embedding, borrowing ideas from [3].

Palabras clave: Propiedad del Árbol, Grandes Cardinales, Forcing, Pruebas de Consistencia, Teoría de conjuntos

Keywords: Tree Property, Large Cardinals, Forcing, Consistency Proofs, Set Theory

Nota de aceptación

Trabajo de tesis

En curso

Director

En curso

Bogotá, D.C., Diciembre de 2014

Agradecimientos

Agradezco a mis padres toda la ayuda incondicional que me han brindado durante toda la carrera. Agradezco especialmente a los profesores *Andrés Villaveces Niño* y *Carlos Di Prisco* por haberme indicado este tema, aceptar trabajar conmigo y darme muchos consejos para este trabajo de grado.

También quiero agradecerle a Paula Cartagena por haberme colaborado con algunos detalles técnicos para este trabajo. A la Universidad Nacional de Colombia sus espacios.

Índice general

1

Introducción

En esta monografía se estudiarán algunos resultados sobre la propiedad del árbol en algunos cardinales no contables. Precisemos algunos conceptos. Un árbol $T = (A, <)$ es un orden tal que para todo $x \in A$, $<$ bien ordena el conjunto $\{y \in A : y < x\}$. Usaremos la notación "$x \in T$" en vez de "$x \in A$". Para cada $a \in T$ definimos la altura de a; denotada por $al(a)$ como el tipo de orden de $\{y \in T : y < x\}$. Definimos a T_α como el α-ésimo nivel de T, donde $T_\alpha = \{x \in T : al(x) = \alpha\}$. Decimos que β es la altura de T, $al(T)$, si β es el mínimo cardinal tal que $T_\beta = \emptyset$.

Si κ es un cardinal infinito, diremos que κ tiene la propiedad del árbol si todo árbol de áltura κ cuyos niveles sean todos de tamaño menor que κ tiene una rama; es decir, un subconjunto $b \subseteq T$, que es linearmente ordenado por $<$ y $b \cap T_\alpha \neq \emptyset$ para todo $\alpha < \kappa$. Llamaremos a todo árbol de altura κ cuyos niveles sean todos de cardinalidad menor que κ un κ-árbol. Luego que κ tenga la propiedad del árbol se puede enunciar diciendo que todo κ-árbol tiene una rama cofinal.

La noción de propiedad del árbol surge del siguiente hecho que es equivalente, en ZF, al teorema de compacidad de la lógica de primer orden

Teorema 1.1. *(D. König)(ZFC) Todo ω-árbol tiene una rama cofinal.*

Es decir, ω tiene la propiedad del árbol. Este resultado en sí es el que genera la pregunta para cardinales no contables. En particular podemos preguntarnos si ω_1 tiene la propiedad del árbol.

Teorema 1.2. *(N. Aronszajn)(ZFC) Existe un ω_1-árbol sin ramas cofinales.*

Dado un κ-árbol T, llamaremos a T un κ-árbol de Aronszajn si T no tiene ramas cofinales. Luego que κ tenga la propiedad del árbol es la afimación de la no existencia de κ-árboles de Aronszajn.

Ahora, queda la pregunta si dado $\kappa > \omega_1$, κ tiene la propiedad del árbol. Si κ es singular, κ no puede tener la propiedad del árbol; si $\kappa = \aleph_\omega$ considere un árbol con nodos en el nivel 0, $\{a_n : n < \omega\}$ de manera que el conjunto de todos los nodos por encima de a_n sea una cadena de tamaño $\aleph_n$, luego un árbol construido de esta manera no tiene ramas y es un $\aleph_\omega$-árbol. Observe que este argumento s generaliza d inmediato a cualquier singular κ. Entonces nos quedan dos casos.

Si κ es débilmente inaccesible, κ debe ser (fuertemente) inaccesible, y llamaremos a κ un cardinal débilmente compacto; debido a que un teorema débil de compacidad vale en el lenguaje $\mathcal{L}_{\kappa\omega}$; la prueba es similar a la demostración de la equivalencia del teorema de compacidad de primer orden y el lema de König.

Sin embargo, es un resultado conocido que si κ es débilmente compacto, κ no puede ser el primer cardinal inaccesible, de hecho κ es el κ-ésimo cardinal inaccesible, luego la consistencia de la existencia de un cardinal débilmente compacto es más fuerte que la de la existencia de un cardinal inaccesible.

La pregunta para κ sucesor es diferente, y será el tema central de la monografía. para $\kappa < \aleph_\omega$

La propiedad del árbol en un cardinal sucesor afecta la arimética cardinal.

Teorema 1.3. *(Specker)[9] Si $\kappa^{<\kappa} = \kappa$, entonces existe un κ^+-árbol de Aronszajn.*

Por ejemplo si HC vale, existe un $\aleph_2$-árbol de Aronszajn.

Las siguientes consistencias valen, bajo la suposición de ciertos principios de grandes cardinales:

Teorema 1.4. *(Mitchell)[5] Si existe un cardinal débilmente compacto y λ es regular, existe una extensión genérica donde λ^{++} tiene la propiedad del árbol.*

En esta monografía expondremos este resultado. Usando ideas de [1]. El uso del cardinal débilmente es de hecho necesario.

Teorema 1.5. *(Silver) Si κ^+ tiene la propiedad del árbol, donde κ es regular, entonces κ^+ es débilmente compacto en L.*

En [5] se pregunta si es consistente, bajo la existencia de dos cardinales débilmente compactos, que $\aleph_2$ y $\aleph_3$ tengan la propiedad del árbol.

Teorema 1.6. *(Magidor)[1] Si $\aleph_2$ y $\aleph_3$ tienen la propiedad del árbol, entonces $0^\sharp$ existe.*

Luego la consistencia de que $\aleph_2$ y $\aleph_3$ tengan la propiedad del árbol es mucho más fuerte que la consistencia de la existencia de dos cardinales débilmente compactos; ya que $0^\sharp$ implica que hay cardinales débilmente compactos arbitrariamente grandes.

Consideremos los siguientes resultados con respecto a esta pregunta:

Teorema 1.7. *(Abraham)[1] Si existe un cardinal supercompacto por encima de un cardinal débilmente compacto, existe una extensión genérica donde $\aleph_2$ y $\aleph_3$ tienen la propiedad del árbol.*

Expondremos este resultado en la monografía. Incluso más, se cambiarán algunas partes del artículo de [1]. En concreto, se dará una demostración distinta del teorema 2.18 de [1], y se probará este resultado en el corolario 4.13, demostrando los lemas 4.11 y el lema 4.12.

Para demostrar que $\aleph_3$ tiene la propiedad del árbol usaremos construcciones que se darán en la sección 3. Para demostrar que $\aleph_2$ tiene la propiedad del árbol, se ultilizará la propiedad de encaje elemental del cardinal supercompacto, ~~usando~~ ideas de [3], donde se demuestra la siguiente generalizacion del resultado de Abraham. adaptando

Teorema 1.8. *(Cummings y Foreman)[3] Si existen infinitos cardinales supercompactos, existe una extensión genérica donde $\aleph_n$ tiene la propiedad del árbol para todo $2 \leq n < \omega$.*

Otros resultados interesantes con respecto a este problema son los siguientes:

Teorema 1.9. *(Apter)[2] Si existe una clase propia de cardinales supercompactos, existe un modelo de* $\mathsf{ZF} + \mathsf{DC}$ *donde todos los cardinales sucesores son regulares y tienen la propiedad del árbol.*

Teorema 1.10. *(Shelah/Magidor)[4] Si existe un número infinito de cardinales supercompactos por encima de un cardinal enorme, entonces existe una extensión genérica donde $\aleph_{\omega+1}$ tiene la propiedad del árbol.*

Mucho después Dima Sinapova mejoró este resultado.

Teorema 1.11. *(Sinapova)[8] Si existe un número infinito de supercompactos, entonces existe una extensión genérica, donde $\aleph_{\omega+1}$ tiene la propiedad del árbol.*

Tomando ideas de [8], Itay Neeman mejoró aun más este resultado.

Teorema 1.12. *(Neeman) [6] Si existe un número infinito de supercompactos, entonces existe un modelo de* ZFC *donde existe un cardinal κ de cofinalidad contable tal que κ^+ tiene la propiedad del árbol, pero* SCH *falla en κ.*

pasar a después de 1.13

Una relación entre SCH y la propiedad del árbol es que antes del resultado de Neeman, los resultados de forzamiento para que fallara SCH en un cardinal κ, siempre ocurría que κ^+ tenía la propiedad del árbol, e.g, el forzamiento de Prikry con un medible.

Teorema 1.13. *(Neeman)[7] Si existe un número infinito de supercompactos, entonces exite una extensión genérica donde* $\aleph_\alpha$ *tiene la propiedad del árbol para todo* $1 <$ $\alpha < \omega$ *y* $\alpha = \omega + 1$.

Con estos resultados en mente, la monografía se divide en las siguientes secciones:

1. Introducción
2. Preliminares
3. En esta sección expondremos el teorema 1.4.
4. Modificación de la demostración del teorema 1.5.

2

Preliminares

2.1. Preliminares de forzamiento

Usaremos la siguiente notación. Si $P \in V_1$ es un pre-orden y V_1 es un modelo transitivo de ZFC, entonces $\dot{P}$ designa algún filtro V_1-genérico sobre P. $V_1[\dot{P}]$ es la extensión genérica de V_1 con respecto a $\dot{P}$, mientras que V_1^P es el modelo de P-nombres, aunque se considerarán como el mismo objeto. Los elementos de V^P se considerarán ya sea como P-nombres o como interpretaciones en $V[\dot{P}]$ según convenga. En el primer caso se notarán en negrita, $\mathbf{b} \in V^P$.

Usaremos la notación $p \leq p'$ para indicar que "p da más información que p'". Asumiremos que todos los posets que se utilizaran son separativos, es decir posets tales que si $p \nleq q$, existe $p' \leq p$ tal que $p' \perp q$. En caso de no tener un poset separativo, consideraremos su cociente separativo, y notaremos la clase de p, por $[p]$.

Si P es un poset de V, y G es un filtro de P tal que para todo denso D de P en V tenemos $D \cap G \neq \emptyset$, entonces decimos que G es un filtro P-genérico sobre V.

Dados dos cardinales $\kappa < \lambda$, $P(\kappa, \lambda) := \{f : dom(f) \subseteq \kappa, ran(f) \subseteq 2, |f| < \kappa\}$, es el poset de Cohen para agregar λ subconjuntos a κ.

Recordemos que si P es un poset, P es κ-Knaster si para toda conjunto $X \subseteq P$ tal que $|X| = \kappa$, existe $Y \subseteq X$ de tamaño κ tal que todos los elementos de P son compactibles.

referencia

Es un hecho conocido que $P(\kappa, \lambda)$ es $(2^{<\kappa})^+$-Knaster. Sin embargo algunas veces $(2^{<\kappa})^+$ puede ser bastante grande. Luego es útil considerar el forzamiento de Cohen en algún modelo interno donde $2^{<\kappa}$ sea pequeño.

Dados dos cardinales regulares $\kappa < \lambda$, E^κ_λ es el conjunto de ordinales $\alpha < \lambda$ tales que $cf(\alpha) = \kappa$.

Lema 2.1. *Sean $V_1 \subseteq V_2$ modelos de* ZFC *con los mismos ordinales. Suponga que en V_1 $\kappa < \mu \leq \lambda$ son cardinales regulares con λ inaccesible, y además en V_2 κ y λ son regulares y todo conjunto de tamaño $< \lambda$ se puede cubrir con un conjunto de V_1 de tamaño $< \lambda$. Entonces en $V_2, P(\kappa,\mu)^{V_1}$ es λ-Knaster.*

Demostración. Durante el resto de la demostración se trabajará en V_2. Sea $\langle f_\alpha : \alpha < \lambda\rangle \subseteq P(\kappa,\mu)^{V_1}$. Sea $D = \bigcup_{\alpha<\lambda} Dom(f_\alpha)$. Si $|D| < \lambda$, existe $E \in V$ tal que $E \supseteq D$ y E es de tamaño $< \lambda$, pero λ es inaccesible en V_1, luego $|{}^E 2|^{V_1} < \lambda$, por lo tanto hay λ elementos repetidos en $\langle f_\alpha : \alpha < \lambda\rangle$. Por lo tanto podemos suponer que $|D| = \lambda$ en V_2.

Sea entonces $h : D \to \lambda$ una biyección. Defina $g : E^\lambda_\kappa \to \lambda$ dada por $g(\alpha) = \sup(h'' Dom(f_\alpha) \cap \alpha)$, entonces g claramente es una función regresiva, luego existe un estacionario $S \subseteq E^\lambda_\kappa$ en donde g es constante, con valor τ. $h^{-1}[\tau + 1]$ tiene cardinalidad $< \lambda$, luego existe $E \in V_1$ tal que $|E| < \lambda$ y $E \supseteq h^{-1}[\tau + 1]$. Como cada $f_\alpha \in V_1$ y $|{}^E 2|^{V_1} < \lambda$; al ser λ inaccesible en V_1, existe $S' \subseteq S$ de tamaño λ tal que $f_\alpha \restriction E = f_\beta \restriction E$ para todo $\alpha, \beta \in S'$. Ahora construimos una subsucesión de $(f_\alpha : \alpha < \lambda)$ de la siguiente manera: $a_0 = \min S'$. Si a_ξ se ha definido para todo $\xi < \alpha < \lambda$, sea $a_\alpha \in S'$ tal que $a_\alpha > \bigcup\bigcup\{h'' Dom(f_{a_\xi}) : \xi < \alpha\}$.

Se sigue que $(f_{a_\xi} : \xi < \lambda)$ es una familia de funciones compatibles: si $\alpha < \beta < \lambda$,$a_\beta > \bigcup h'' Dom(f_{a_\alpha})$, es decir, $h'' Dom(f_{a_\alpha}) \subseteq a_\beta$, lo cual implica que $(h'' Dom(f_{a_\alpha})) \cap (h'' Dom(f_{a_\beta})) = (h'' Dom(f_{a_\alpha})) \cap (h'' Dom(f_{a_\beta})) \cap a_\beta \subseteq \tau + 1$, entonces $Dom(f_{a_\alpha}) \cap Dom(f_{a_\beta}) \subseteq E$, y por lo tanto f_{a_α} y f_{a_β} son compatibles.

Si P y Q son dos forzamientos, diremos que P y Q son equivalentes, lo cual notaremos $P \cong Q$, sii existe un poset D tal que D se encaja densamente en P y Q. □

2.1.1. Proyecciones

Definición 2.2. Sean A y B pre-órdenes, una función $\pi : B \to A$ se llama una *proyección* sii cumple las siguientes condiciones:

(i) π es un homomorfismo y la imagen de π es densa en A.

(ii) Si $\pi(b) = a$ y $a' \leq a$, existe $b' \leq b$ tal que $\pi(b') \leq a'$.

Recordemos que si A es un poset, y $B \in V^A$ es un A-nombre para un poset. Entonces $A * B$ es el orden, definido en V de la siguiente forma $A * B := \{(p,q) : p \in A, q \in V^A, \Vdash_P q \in B\}$ ordenado por $(p,q) \leq (p',q')$ sii $p \leq_A p'$ y $p \Vdash q \leq_B q'$.

Claramente si $\pi : A * B \to A$ es dada por $(a,b) \mapsto a$, π es una proyección. Una propiedad de las proyecciones que utilizaremos es la siguiente:

Lema 2.3. *[1] Si $\pi : B \to A$ es una proyección y $\dot{B}$ es V-genérico sobre B, entonces $\dot{A} = \{a \in A : \pi(b) \leq a$ para algún $b \in \dot{B}\}$ es V-genérico sobre A, y si definimos en $V[\dot{A}]$, $B/\dot{A} = \{b \in B : \pi(b) \in \dot{A}\}$ parcialmente ordenado como suborden de B, entonces $\dot{B}$ es $V[\dot{A}]$ genérico sobre $B/\dot{A}$.*

Este hecho nos permite hacer dos cosas. Primero, si tenemos un $\dot{B}$-filtro genérico sobre V, existe un filtro A-genérico sobre V en $V[\dot{B}]$. También tenemos que existe un poset $\mathbf{P}$ en V^A de manera que $(V^A)^{\mathbf{P}} = V^B$. Sin embargo, este hecho también nos da una construcción explícita del forzamiento $\mathbf{P}$; a saber $B/\dot{A}$.

Con respecto a la propiedad del árbol, se usará el lema anterior de la siguiente forma. Algunas veces tendremos posets A, B tales que A es proyección de B y si tomamos un árbol de Aronszajn $T \in V^A$, $B/\dot{A}$ preservará árboles de Aronszajn, y luego T seguirá siendo un árbol de Aronszajn.

La siguiente definición se usará para hallar $B/\dot{A}$ dada una proyección $\pi : B \to A$; véanse lema 3.12 y lema 4.13.

Definición 2.4. Ahora, como tenemos que $V[\dot{A}] \subseteq V[\dot{B}]$ y $V[\dot{B}]$ es una extensión genérica de $V[\dot{A}]$ forzando con $B/\dot{A}$, podemos hacer lo siguiente. Primero, si $\mathbf{x} \in V[\dot{A}]$ es tal que $\mathbf{x}$ se interpreta como un $B/\dot{A}$-nombre, podemos elegir un B-nombre $[\mathbf{x}]^B$, de manera que en toda extensión B-genérica de V, $[\mathbf{x}]^B$ se interprete de la misma manera como se interpreta $\mathbf{x}$ en $V[\dot{A}][\dot{B}/\dot{A}]$. Segundo, si $\mathbf{x}$ es un B-nombre, podemos elegir un A-nombre $[\mathbf{x}]^A$ tal que en toda extensión A-genérica de A, $[\mathbf{x}]^A$ se interpreta como un $B/\dot{A}$-nombre que en $V[\dot{A}][(\dot{B}/\dot{A})^{\cdot}]$ tiene la misma interpretación de $\mathbf{x}$ en $V[\dot{B}]$.

2.1.2. Relación entre el forzamiento y la propiedad del árbol.

Los siguientes lemas, aunque fáciles de enunciar y también de demostrar, serán la pieza clave de varios argumentos que estudiaremos más adelante. Son lemas que muestran que si un poset P cumple ciertas propiedades, entonces para ciertos tipos de árbol de Aronszajn, en cualquier extensión genérica por medio de P, estos árboles seguirán siendo árboles de Aronszajn.

Lema 2.5. *(Kunen y Tall) Si T es un árbol de altura κ sin ramas cofinales, κ cardinal no contable, y P κ-Knaster, entonces T sigue sin tener ramas en V^P.*

Demostración. Suponga que en V^P $\mathbf{f}$ es una rama de T. Para cada $\alpha < \lambda$, existe $p_\alpha \in P$ y $x_\alpha \in T$ tales que $p_\alpha \Vdash \mathbf{f}(\alpha) = x_\alpha$. Como P tiene la propiedad (K) para λ, existe $S \subseteq \lambda$, $S \in V$, de tamaño λ tal que para todo $\alpha, \beta \in S$, p_α y p_β son compatibles. Entonces $\{x_\alpha : \alpha \in S\}$ es un subconjunto de T tal que cada x_α, $\alpha \in S$, está en el nivel α de T, y para todo $\alpha, \beta \in S$ con $\alpha < \beta$ se tiene que $x_\alpha \leq_T x_\beta$, ya que existe $q \leq p_\alpha, p_\beta$ y así $q \Vdash$ "$\mathbf{f}(\alpha) = x_\alpha \wedge f(\beta) = x_\beta \wedge \mathbf{f}$ es una rama cofinal de T ", con lo que $q \Vdash x_\alpha \leq_T x_\beta$, es decir, $x_\alpha \leq_T x_\beta$. Contradicción. □

Lema 2.6. *[1] Si T es un κ-árbol de Aronszajn, κ regular, y P es κ-cerrado, entonces T sigue siendo un κ-árbol de Aronszajn en V^P.*

Demostración. Si existe $\mathbf{f} \in V^P$ tal que $\Vdash_P$ "$\mathbf{f}$ es una rama cofinal de T", podemos crear en V una sucesión $\langle (p_\alpha, x_\alpha) : \alpha < \kappa \rangle \subseteq P \times T$ tal que $p_\beta \leq p_\alpha$ para $\alpha < \beta$ y $p_\alpha \Vdash$ "$\mathbf{f}(\alpha) = x_\alpha$", luego $\langle x_\alpha : \alpha < \kappa \rangle \in V$ sería una rama cofinal de T.

□

Lema 2.7. *(Silver)[1] Sea λ regular y T un λ-árbol. Sea P κ^+-cerrado, donde $2^\kappa \geq \lambda$. Entonces toda rama cofinal de T en V^P está en V.*

Demostración. Si $\kappa \geq \lambda$, se argumenta igual que en el lema anterior. En caso contrario podemos suponer SPDG que κ es el mínimo cardinal tal que $2^\kappa \geq \lambda$. Suponga que $\mathbf{b} \in V^P$ es tal que $\Vdash$ "$\mathbf{b}$ es una rama cofinal de T que no está en V"; $\Vdash$ "$\mathbf{b} \notin V$" significa que para todo x tenemos $\Vdash$ "$\mathbf{b} \neq x$". Se sigue que para cada $\alpha < \lambda$ y cada $p \in P$, existen $\alpha \leq \delta < \lambda$ y $q, q' \leq p$ tales que q y q' deciden valores diferentes de $\mathbf{f}(\delta)$; esto se puede hacer ya que de otra manera p forzaría "$\mathbf{b} \in V$".

Como λ es regular, la minimalidad de κ implica que $2^{<\kappa} < \lambda$, luego es fácil construir por inducción en V para cada $\alpha < \kappa$ y cada $t : \alpha \to 2$ una condición $p_t \in P$, un ordinal $\mu(\alpha) < \lambda$ y un nodo $n_t \in T_{<\mu(\alpha)}$ tales que se cumple lo siguiente: $p_t \Vdash n_t \in b, f \subseteq f' \Rightarrow p_{f'} \leq_T p_f$ y $n_{t\frown 0}$ y $n_{t\frown 1}$ son incomparables en T. Sea $\mu(\kappa) = \sup\{\mu(\alpha) : \alpha < \kappa\}$, luego $\mu(\kappa) < \lambda$.

Entonces, como P es κ^+-cerrado, para cada $g : \kappa \to 2$ en V, elegimos $p_g \in P$ y $x_g \in V$ tales que $p_g \leq p_{g\restriction\alpha}$ para todo $\alpha < \kappa$ y $p_g \Vdash \mathbf{b} \restriction \mu(\kappa) = x_g$. Entonces si $g, h \in ({}^\kappa 2)^V$ son distintos, por la construcción se obtiene que $x_g \neq x_f$, esto implica que $|T_{\mu(\kappa)+1}| \geq 2^\kappa \geq \lambda$, lo cual contradice la suposición de que T es un λ-árbol. □

2.2. Grandes cardinales y encajes

En esta sección definiremos varios grandes cardinales, los cuales utilizaremos para probar la consistencia de varias instancias de la propiedad del árbol en cardinales pequeños. También hablaremos un poco de la relación entre grandes cardinales y encajes elementales.

La primera noción de gran cardinal que expondremos es la de cardinal inaccesible. Un cardinal κ se dice inaccesible sii κ es regular y cardinal límite fuerte; es decir $2^\lambda < \kappa$ para todo $\lambda < \kappa$. Esta no parece ser una definición fuera de lo común, y el lector podría intentar construir un ejemplo de este tipo de cardinal, sin embargo tenemos lo siguiente

$$V_\kappa \models \mathsf{ZFC},$$

luego si de alguna forma pudieramos construir un cardinal débilmente compacto κ en ZFC obtendríamos que $\mathsf{ZFC} \vdash Con(\mathsf{ZFC})$, lo cual contradiría el segundo de teorema de Gödel. Así como $V_\kappa \models \mathsf{ZFC}$, obtenemos que $Con(\mathsf{ZFC} +$ "Existe un cardinal inaccesible ")$\longrightarrow Con(\mathsf{ZFC})$, sin embargo la afirmación recíproca es falsa, como vimos anteriormente.

Ahora, definiremos varios grandes cardinales y algunos principios, de manera que la consistencia de la noción que definamos primero es implicada por la consistencia de la noción que se definirá después, pero no de manera contraria.

2.2.1. Cardinales débilmente compactos.

La definición de cardinal débilmente compacto tiene motivación en la teoría de modelos.

Definición 2.8. Diremos que el lenguaje $\mathcal{L}_{\kappa,\omega}$(o $\mathcal{L}_{\kappa,\kappa}$) cumple el *teorema de compacidad débil* sii para todo conjunto Σ de sentencias en el lenguaje $\mathcal{L}_{\kappa,\omega}$(o $\mathcal{L}_{\kappa,\kappa}$) tal que $|\Sigma| = \kappa$ tal que para todo $\Lambda \subseteq \Sigma$ con $|\Lambda| < \kappa$, Λ tiene un modelo, entonces Σ tiene un modelo.

Definición 2.9. Llamaremos a un cardinal κ *débilmente compacto* sii el lenguaje $\mathcal{L}_{\kappa,\omega}$ satisface el teorema de compacidad débil.

De hecho, podemos reemplazar en la definición anterior a $\mathcal{L}_{\kappa,\omega}$ por $\mathcal{L}_{\kappa,\kappa}$ y obtener una equivalencia.

Notemos que en $L_{\omega,\omega}$ vale el teorema de compacidad débil. Los cardinales débilmente compactos son una generalización de ω en este sentido.

Las nociones de grandes cardinales que daremos durante esta sección siempre tienen un equivalente combinatorio.

Definición 2.10. Dado un conjunto X, $[X]^2$ es el conjunto de todos los conjuntos $\{a, b\} \subseteq X$ tales que $a \neq b$.

Lema 2.11. *Un cardinal no contable κ es débilmente compacto sii para toda función $F : [\kappa]^2 \longrightarrow \kappa$, existe un subconjunto $H \subseteq \kappa$ tal que $F \restriction [H]^2$ es constante.*

Notemos que esto también vale para ω.

También hay otra equivalencia modelo teórica que usa encajes elementales. Esta será la propiedad que usaremos para demostrar el resultado de Mitchell.

Lema 2.12. *(Keisler) κ es un cardinal débilmente compacto sii κ es inaccesible y además para todo conjunto transitivo M tal que $(M, \in)$ es modelo de $\mathsf{ZFC} - \mathsf{P}, \kappa \in M, M^{<\kappa} \subseteq M, |M| = \kappa$, existe un conjunto transitivo N y un encaje elemental $j : (M, \in) \longrightarrow (N, \in)$ tal que $crit(j) = \kappa$.*

En un momento definiremos que significa "$crit(j) = \kappa$". Por ahora notemos que el hecho de que $j : (M, \in) \longrightarrow (N, \in)$ es un encaje elemental tenemos que $(N, \in) \models \mathsf{ZFC} - \mathsf{P}$. Si M, N son conjuntos transitivos que son modelos de $\mathsf{ZFC} - \mathsf{P}$ y $j : (M, \in) \to (N, \in)$ es un encaje elemental no trivial, debe existir un cardinal $\alpha \in M$ tal que $j(\alpha) \neq \alpha$, ya que de otra manera como M es un modelo transitivo de un buen fragmento de ZFC, podríamos probar por $\in$-inducción que $j(x) = x$ para todo x, y j sería trivial. Al mínimo ordinal $\alpha \in M$ tal que $j(\alpha) \neq \alpha$, lo llamaremos *punto crítico* de j, y lo notaremos $crit(j)$. Claramente $j(\alpha) > \alpha$.

Ahora se ilustrará la relación de los cardinales débilmente compactos con la propiedad del árbol.

Lema 2.13. *Un cardinal inaccesible es débilmente compacto sii tiene la propiedad del árbol.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Suponga por el contrario que existe un κ-árbol de Aronszajn T. SPDG podemos suponer que $T = \kappa$. Por el teorema de Löwenheim-Skolem existe $(\bar{M}, \in) \prec (H_{\lambda^+}, \in)$ tal que $\kappa \subsetneq \bar{M}, \kappa, T \in \bar{M}$ y $|\bar{M}| = \kappa$. Sea $c : \bar{M} \to M$ el colapso transitivo de $\bar{M}$, como $\kappa \subseteq \bar{M}$, se tiene que $c(\kappa) = \kappa$ y $c(T) = T$, y por lo tanto $\kappa, T \in M$. Claramente $|M| = \kappa$.

Por el lema 2.10 existe un conjunto transitivo N y un encaje elemental no trivial $j : (M, \in) \longrightarrow (N, \in)$ tal que $crit(j) = \kappa$. Luego $j(T)$ es un $j(\kappa)$-árbol en N, y también $T = j(T)_{<\kappa}$, pero como $j(\kappa) > \kappa$, el conjunto de antecesores de un elemento del nivel κ de $j(T)$ es una rama de T. Contradicción.

($\Leftarrow$) Se demuestra que $\mathcal{L}_{\kappa,\omega}$ satisface el teorema de compacidad débil usando la propiedad del árbol, de manera similar a como se demuestra ~~que~~ el teorema de compacidad de primer orden a partir del hecho que ω satisface la propiedad del árbol. $\square$

El argumento que se usa en la parte del "sólo si" de la demostración anterior lo repetiremos varias veces, es muy importante entenderlo.

Otra caracterización muy importante de los cardinales débilmente compactos es la siguiente.

Definición 2.14. Una sentencia σ se dice Π^1_1-sentencia sii $\forall X \varphi(X)$, donde X es una variable de segundo orden, y todas las variables acotadas de $\varphi(X)$ son de primer orden. Recordemos la relación entre una variable de segundo orden X y una variable de primer orden z, $X(z)$ significa $z \in X$.

Ejemplo 2.15. Por ejemplo la sentencia en el lenguaje $\{<\}$ $\sigma = \forall X \exists z(X(z) \rightarrow \exists w \forall y(X(y) \rightarrow w < y))$, es una Π^1_1-sentencia que vale en $(\mathbb{N}, <)$.

Lema 2.16. *(Hanf-Scott) Un cardinal κ es débilmente inaccesible sii para toda Π^1_1-sentencia σy todo $U \subseteq V_\kappa$ tenemos que si $(V_\kappa, \in, U) \models \sigma$, entonces existe $\alpha < \kappa$ tal que $(V_\alpha, \in, U \cap V_\alpha) \models \sigma$.*

2.2.2. $0^\sharp$ y equivalentes

Al siguiente principio lo llamaremos $0^\sharp$: "$0^\#$ existe"

Existe una clase propia $I \subseteq Ord$ que es cerrada, contiene a todos los cardinales no contables y además para todo cardinal no contable κ:

1. $|I \cap \kappa| = \kappa$;

2. $I \cap \kappa$ es una sucesión de indiscernibles de $(L_\kappa, \in)$;

3. L_κ es la clausura de Skolem de $I \cap \kappa$.

Supongamos que $0^\sharp$ existe. Como I contiene todos los cardinales no contables, I contiene cardinales regulares, luego estos cardinales son regulares en L y por lo tanto por la indiscernibilidad de I en L, obtenemos que todos los cardinales son regulares en L, por ejemplo $\aleph_\omega$. También, existen cardinales límite en I, y estos cardinales siguen siendo cardinales límite en L, con lo que todos los cardinales de I son cardinales límite en L, entonces como en L vale GCH, se sigue que todos los cardinales son inaccesibles en L!

Otros métodos se pueden usar para demostrar que todos los cardinales no contables de V son débilmente compactos en L. Obtenemos así que la consistencia de la existencia de $0^\sharp$ implica la existencia de un cardinal débilmente compacto pero no de manera contraria.

Por último, enunciaremos un par de equivalentes a $0^\sharp$ que usaremos más adelante.

Teorema 2.17. *(Lema de cobertura de Jensen) Si $0^\sharp$ no existe, para todo conjunto no contable de ordinales X, existe un conjunto $Y \in L$ tal que $Y \supseteq X$ y además $|Y| = |X|$*

Teorema 2.18. *(Kunen) $0^\sharp$ existe sii existe un encaje elemental no trivial $j : L \rightarrow L$.*

2.2.3. Cardinales medibles

En la sección anterior vimos que si suponemos la existencia de $0^\sharp$, existe un encaje elemental $j : L \to L$ que es no trivial. Entonces nos podemos preguntar si es consistente que exista una clase propia j tal que $j : V \to V$ es un encaje elemental.

Teorema 2.19. *(Kunen) No existe un encaje elemental $j : V \to V$ que sea distinto al trivial.*

Sin embargo, si en vez de tomar como clase de llegada a V tomamos una clase transitiva más pequeña, esto sí es consistente bajo la suposición de la existencia de cierto gran cardinal.

Definición 2.20. Un cardinal no contable κ se dice *medible* sii existe un ultrafiltro no principal sobre κ que es κ-completo, es decir, toda intersección de menos de κ elementos del ultrafiltro está en el ultrafiltro.

Esta definición la creó Ulam al resolver una pregunta de Lebesgue sobre la existencia de una medida sobre un conjunto no contable que fuera σ-completa. Un cardinal medible se puede ver como un conjunto no contable con una medida binaria que es κ-completa. Hay que resaltar el hecho de que si κ es el primer cardinal no
\label{comp}
contable para el cual existe un ultrafiltro σ-completo, es decir, cerrado bajo intersecciones contables, entonces U es κ-completo, y con esto justificamos la definición 2.20.

by Lemma
Resaltamos el hecho que si κ es medible, κ es el κ-ésimo cardinal débilmente compacto, y así la existencia de un medible implica la existencia de un débilmente
\ref{comp}
compacto, pero no al revés.

También es importante mencionar que la existencia de un cardinal medible implica la existencia de $0^\sharp$, pero no de manera contraria.

La propiedad de los cardinales medibles que realmente nos interesa es la siguiente:

Teorema 2.21. *Un cardinal no contable κ es medible sii existe una clase transitiva M y una clase j tales que $j : V \to M$ es un encaje elemental no trivial tal que $crit(j) = \kappa$.*

La idea, dado un cardinal medible κ, es formar una ultrapotencia del universo V, de manera muy cuidadosa ya que V no es un conjunto, usando un ultrafiltro no principal sobre κ que sea σ-completo. La completitud del ultrafiltro se usa para que la ultrapotencia quede bien fundamentada, para luego al tomar colapsos transitivos obtener una clase transitiva M. Cabe mencionar que $j(\kappa) > \kappa$ y $M^\kappa \subseteq M$.

Por último ilustremos la relación de un cardinal medible con la propiedad del árbol.

Lema 2.22. *Todo cardinal medible tiene la propiedad del árbol.*

Demostración. Esta demostración es similar a la prueba del lema 2.11. Suponga, por el contrario, que T es un κ-árbol de Aronszajn; SPDG el universo de T es κ. Sea $j : V \longrightarrow M$ un encaje elemental tal que $crit(j) = \kappa$, para alguna clase transitiva M y alguna clase j. Luego $j(T)$ es un $j(\kappa)$-árbol. Como $crit(j) = \kappa$, $j(T) \upharpoonright \kappa = T$, sin embargo el conjunto de antecesores de cualquier elemento del nivel κ de $j(T)$ es una rama de T. Contradicción. □

2.2.4. Cardinales supercompactos

Los cardinales supercompactos son simplemente una generalización de los cardinales medibles.

Definición 2.23. Dados dos cardinales no contables κ, λ, κ es λ-*supercompacto* sii existe una clase j, una clase transitiva M tales que $j : V \to M$ es un encaje elemental tal que $j(\kappa) > \lambda$ y M^λ.

Un cardinal no contable κ se dice *supercompacto* sii es λ-supercompacto para todo $\lambda > \kappa$

Luego un cardinal κ medible es κ-supercompacto. También hay una definición combinatoria de la noción de supercompacidad, la cual no daremos por cuestión de espacio; véase [10].

Teorema 2.24. *Si κ es 2^κ-supercompacto, κ es el κ-ésimo medible.*

Los cardinales supercompactos son muy conocidos por su rol en la consistencia de axiomas de forzamiento como PFA o MM.

2.2.5. Encajes elementales y forzamiento

Muchas veces necesitaremos levantar algunos encajes elementales a extensiones genéricas. El siguiente lema da una condición suficiente.

Hecho 2.25. *(Silver) Suponga que M, N son modelos de $\mathsf{ZFC} - \mathsf{P}$. Sea $k : M \to N$ un encaje elemental, sea $P \in M$ una noción de forzamiento. Suponga que $\dot{P}$ es M-generico sobre P y $\dot{Q}$ es N-genérico sobre $k(P)$ y que $k``\dot{P} \subseteq \dot{Q}$. Entonces existe una única $k^* : M[\dot{P}] \to N[\dot{Q}]$ tal que $k^* \upharpoonright M = k$ y $k^*(\dot{P}) = \dot{Q}$.*

Este lema se usará de la siguiente forma. Se querrá demostrar que en cierto modelo $V[\dot{R}]$ donde se quiere demostrar que cierto árbol T tiene ramas. Si no tuviera, se usa el levantamiento dado por el lema para obtener un encaje elemental $j : V[\dot{R}] \to N'$, luego T será un segmento incial de $j(T)$ y se obtiene una contradicción.

3

La propiedad del árbol en un sucesor de un regular

En esta sección se estudiará el siguiente resultado:

Teorema 3.1. *(Mitchell) Dado un modelo de $V \models \mathsf{ZFC} +$ "existe un cardinal débilmente compacto λ", existe una extensión genérica $V[G]$ donde los cardinales menores que o iguales a $\aleph_1$ y los mayores que o iguales aλ se preservan, y $2^{\aleph_0} = \lambda = \aleph_2$ y $\aleph_2$ tiene la propiedad del árbol.*

La idea básicamente es definir un poset M de parejas de funciones de manera que $M \upharpoonright \alpha + 1$; es decir el conjunto de todas las parejas $(p \upharpoonright \alpha + 1, q \upharpoonright \alpha \dot{+} 1)$, se definan a partir de $M \upharpoonright \alpha$ y que si $\alpha < \lambda$ es inaccesible, el cociente $M/\dot{M} \upharpoonright \alpha$ preserva α-árboles de Aronszajn.

Luego si $\mathbf{T} \in V^M$ y aplicamos la Π^1_1- reflexividad de λ se obtendrá que para algún $\alpha < \lambda$ inaccesible, $\mathbf{T} \upharpoonright \alpha$ será un $M \upharpoonright \alpha$-nombre para un α-árbol de Aronszajn, y se obtendrá una contradicción ya que $M/\dot{M}|\alpha$ preserva α-árboles de Aronszajn, y $\mathbf{T} \upharpoonright \alpha$ es segmento inicial de $\mathbf{T}$.

Definición 3.2. (Poset de Mitchell) Sean $\kappa < \lambda$ cardinales regulares, donde λ es inaccesible. Sea $P := P(\kappa, \lambda) = \{f \in Fn_\kappa(\lambda, 2)^V$: el dominio de f consiste sólo de ordinales sucesores$\}$. Esto es solo una elección técnica para después.

Definimos

$$M(\kappa, \lambda) = \{(p, q) : p \in P(\kappa, \lambda), q \text{ es una función de cardinalidad } \leq \kappa$$

$$\text{y para todo } \alpha \in dom(q), \alpha \text{ es cardinal sucesor } < \lambda, \Vdash_{P\upharpoonright\alpha} q(\alpha) \in \mathbf{Q}(\alpha)\},$$

donde $\mathbf{Q}(\alpha) \in V^{P\upharpoonright\alpha}$ es el orden $(Fn_{\kappa^+}(\kappa^+, 2))^{V^{P\upharpoonright\alpha}}$. $M(\kappa, \lambda)$ se ordena parcialmente de la siguiente forma $(p, f) \leq (p', f')$ sii $p \leq_P p'$, y para todo $\alpha \in dom(f')$, $\alpha \in dom(f)$ y $p \upharpoonright \alpha \Vdash_{P\upharpoonright\alpha} f'(\alpha) \subseteq f(\alpha)$.

Definición 3.3. En la definición anterior, sea $\mathbf{A}(\kappa,\lambda) = \pi_2(M(\kappa,\lambda)) = \{f : (p,f) \in M(\kappa,\lambda)$ para algún $p\}$ ordenado en V^P de la siguiente manera, para $f, f' \in \mathbf{A}(\kappa,\lambda)$ y $p \in P, p \Vdash_P f \leq_{\mathbf{A}} f'$ sii para todo $\alpha \in dom(f')$, $\alpha \in dom(f)$ y $p \restriction \alpha \Vdash_{P\restriction\alpha} f'(\alpha) \subseteq f(\alpha)$.

Entonces es claro que $M(\kappa,\lambda) = P(\kappa,\lambda) * \mathbf{A}(\kappa,\lambda)$. $M(\kappa,\lambda)$ es el poset que se utiliza en [5] para demostrar el teorema 3.1; aunque sólo se demuestra el caso $\kappa = \aleph_0$

Lema 3.4. *$M(\kappa,\lambda)$ es λ-c.c. En $V^{M(\kappa,\lambda)}$ λ es κ^{++} y $2^\kappa = \lambda$.*

Demostración. Véase [1] para los detalles. □

Para demostrar el resultado de Mitchell no es necesario dar la siguiente definición que es mucho más general. Sin embargo, varias de las propiedades del poset $M(\kappa,\lambda)$ también se necesitarán para algunas construcciones de más adelante, para el poset más generalizado, siendo las pruebas para el caso menos general casi iguales a las del caso más general.

Definición 3.5. Sean $V_1 \subseteq V_2$ modelos de ZFC con los mismos ordinales. En V_2 sea κ un cardinal regular y $\lambda > \kappa$ un cardinal inaccesible.

Fije $P = P(\kappa,\lambda)$. Entonces definamos en $V_2, M(\kappa,\lambda,V_1,V_2)$ el conjunto de todas las tuplas (p,q) tales que

1. $p \in P$.
2. $q \in V_2$ es una función de tamaño $\leq \kappa$, $dom(q) \subseteq \lambda$ tal que para todo $\alpha \in dom(q)$, α es cardinal sucesor $< \lambda$ y tenemos $\Vdash_{P\restriction\alpha} q(\alpha) \in Add(\kappa^+,1)^{V^{P\restriction\alpha}}$

parcialmente ordenado por $(p,q) \leq (p',q')$ sii $p \leq p'$ y para todo $\alpha \in Dom(q'), \alpha \in Dom(q)$ y $p \restriction \alpha \Vdash_{P\restriction\alpha} q'(\alpha) \subseteq q(\alpha)$.

Lema 3.6. *$M(\kappa,\lambda,V_1,V_2)$ es λ-.c.c. en V_2.*

Demostración. Tenemos que $M(\kappa,\lambda)$ es una iteración de todos los $M(\kappa,\eta)$, $\eta < \lambda$, donde si $cf(\eta) = \kappa$, $M(\kappa,\eta)$ es límite inverso, mientras que para $cf(\eta) > \kappa$, $M(\kappa,\eta)$ es límite directo, luego $M(\kappa,\lambda)$ es λ-c.c por el teorema 16.30 de [10] □

Como en la construcción de Mitchell, sea $\mathbf{A}(\kappa,\lambda,V_1,V_2) = \{f : (p,f) \in M(\kappa,\lambda,V_1,V_2)$ para algún $p\}$, ordenado en V^P así: $p \Vdash_P f \leq f'$ sii para todo $\alpha \in Dom(f'), \alpha \in Dom(f)$ y $p \restriction \alpha \Vdash_{P\restriction\alpha} f'(\alpha) \subseteq f(\alpha)$. Notemos que también tenemos en este caso $M(\kappa,\lambda,V_1,V_2) = P(\kappa,\lambda)^{V_1} * \mathbf{A}(\kappa,\lambda,V_1,V_2)$.

Definición 3.7. Sea $A^* = A^*(\kappa, \lambda, V_1, V_2) := \{(1, f) : (1, f) \in M(\kappa, \lambda, V_1, V_2)\}$ ordenado de la siguiente manera: $f \leq f'$ sii para todo $\alpha \in dom(f'), \alpha \in dom(f)$ y $\Vdash_{P\restriction\alpha} f'(\alpha) \subseteq f(\alpha)$; note que $A^* \in V_2$.

El poset $A^*(\kappa, \lambda, V, V)$ que acabamos de definir, junto con $P(\kappa, \lambda)^V$ son justamente los posets A^* y P, respectivamente, que mencionábamos al comienzo de esta sección.

Tenemos que para todo α cardinal sucesor $\Vdash_{P\restriction\alpha}$ " toda familia compatible de $\mathbf{Q}(\alpha)$ de tamaño $\leq \kappa$ tiene ínfimo", ya que $\mathbf{Q}(\alpha) = (P(\kappa^+, \kappa^+))^{V_2^{P\restriction\alpha}}$ luego por la construcción de $M(\kappa, \lambda, V_1, V_2)$ y el lema maximal, lo siguiente es inmediato:

Lema 3.8. *En V_2 toda familia de $A^*(\kappa, \lambda, V_1, V_2)$ de tamaño $\leq \kappa$ tiene ínfimo en A^*.*

Demostración. Sea $\{(0, q_i) : i \in I\} \in V_2$ un conjunto compatible dos a dos de cardinalidad $\leq \kappa$. Se quiere definir una función q tal que el $(0, q)$ es el supremo del conjunto. Ponemos $Dom(q) = \bigcup_{i \in I} Dom(q_i)$. Para $\alpha \in Dom(q)$, sea $I_\alpha = \{i \in I : \alpha \in Dom(q_i)\}$, entonces en V_2,

$$\Vdash_{P\restriction\alpha} \text{“}\{q_i(\alpha) : i \in I_\alpha\} \text{ es un conjunto de elementos compatibles de } \mathbf{Q}(\alpha)\text{”}.$$

Luego existe un $q(\alpha) \in V_2^{P\restriction\alpha}$ tal que $\Vdash_{P\restriction\alpha}$ "$q(\alpha)$ es la unión de $\{q_i(\alpha) : i \in I_\alpha\}$. Ahora $(0, q)$ es el supremo de $\{(0, q_i) : i \in I\}$. □

El siguiente lema nos dará la proyección de la que hablabamos al comienzo de esta sección.

Lema 3.9. *$\pi : P(\kappa, \lambda)^{V_1} \times A^*(\kappa, \lambda, V_1, V_2) \to M(\kappa, \lambda, V_1, V_2)$ dada por $(p, (1, f)) \mapsto (p, f)$ es una proyección.*

Demostración. Suponga que $(p', q') \leq_M \pi((p, q)) = (p, q)$, queremos encontrar $q^* \in A^*$ tal que $q^* \leq_{A^*} q$ y $[(p', q*)]_M = [(p', q')]_M$. Esto se logra simplemente tomando $Dom(q^*) = Dom(q')$, y para cada $\alpha \in Dom(q')$ tomar $q'(\alpha) \in V^{P\restriction\alpha}$ tal que $p' \restriction \alpha \Vdash_{P\restriction\alpha} q^*(\alpha) = q'(\alpha)$ y para $r \in P \restriction \alpha$ incompatible con $p' \restriction \alpha, r \Vdash_{P\restriction\alpha} q^*(\alpha) = q(\alpha)$, luego $[(p', q^*)]_M = [(p', q')]_M$ y claramente $(p', q^*) \leq_{P \times Q^*} (p, q)$. □

Por el siguiente lema todo conjunto de ordinales de $V_2^{M(\kappa,\lambda,V_1,V_2)}$ de tamaño κ se puede cubrir con un conjunto de V_1 de cardinal κ.

Lema 3.10. *Si P es κ^+-c.c en V_2 todo conjunto de ordinales en $V_2[\dot{M}(\kappa, \lambda, V_1, V_2)]$ de tamaño $\leq \kappa$ está en $V_2[\dot{P}]$.*

Demostración. Durante la prueba $M = M(\kappa, \lambda, V_1, V_2)$, $A^* = A^*(\kappa, \lambda, V_1, V_2)$ y $P = P(\kappa, \lambda)^{V_1}$. Considere la proyección $\pi : P \times A^* \to M$ dada en el lema anterior.

Tenemos que $V^P \subseteq V^{P \times A^*}$. Luego basta demostrar que todo conjunto de ordinales de $V^{P\times A^*}$ está en V^P. Tenemos que $P \times A^* \cong A^* \times P$, y P satisface la κ^+-c.c, ya que A^* es κ^+-cerrado en V_2 y P satisface la κ^+-c.c. en V_2. Entonces todo nombre de un conjunto ordinales de tamaño $\leq \kappa$ tiene un nombre en $V_2^{A^*}$ de tamaño $\leq \kappa$, y por lo tanto este nombre está en V_2 ya que A^* es κ^+-cerrado, luego el conjunto de ordinales está en V^P. $\square$

Ahora necesitamos analizar un poco más el poset $M(\kappa, \lambda, V_1, V_2)$. Suponga que $\kappa < \lambda' < \lambda$ es inaccesible. Sea $M' = M(\kappa, \lambda', V_1, V_2)$. Claramente $\sigma_{\lambda'} : M \to M'$ dada por $(p, f) \mapsto (p \restriction \lambda', f \restriction \lambda')$ es una proyección. Para saber qué es $M/\dot{M}'$ se dará la siguiente definición. Sea $W = V_2^{M'}$.

Definición 3.11. En W, $M(\kappa, \lambda - \lambda', V_1, W) := \{(p, f) : p \in P \restriction \lambda - \lambda'$ y $f \in W$ es una función $|q| \leq \kappa, \alpha \in Dom(q) \Rightarrow \alpha \in \lambda - \lambda'$ es cardinal sucesor, $q(\alpha) \in W^{P\restriction\alpha}$ y $\Vdash^W_{P\restriction\alpha-\lambda'}$ "$q(\alpha) \in P(\kappa^+)^{W^{P\restriction\alpha-\lambda'}}$"$\}$, ordenado

Lema 3.12. *Si P es κ^+-c.c en V_2 y en W, entonces $M \equiv M' * M(\kappa, \lambda - \lambda', V_1, W)$.*

Demostración. En esta demostración usaremos la definición 2.3 Definamos $\varphi : M \to M' * M(\kappa, \lambda - \lambda', V_1, W)$ por $(p, q) \mapsto (p \restriction \lambda', q \restriction \lambda', \bar{p}, \bar{q})$, donde $\bar{p} = p \restriction \lambda - \lambda'$, $dom(\bar{q}) = dom(q) - \lambda'$, y para todo $\xi \in dom(\bar{q}), \bar{q}(\xi) = [q(\xi)]^{P\restriction\lambda'}$, donde consideramos $P \restriction \xi = P \restriction \lambda' \times P \restriction (\xi - \lambda')$; como $q(\xi)$ es un $P \restriction \xi$-nombre, $[q(\xi)]^{P\restriction\lambda'}$ es un $P \restriction \lambda'$-nombre de un $P \restriction \xi - \lambda'$-nombre tal que en cualquier extensión genérica de $V[\dot{P} \restriction \lambda'][\dot{P} \restriction \xi - \lambda']$, la interpretación de $[q(\xi)]^{P\restriction\lambda'}$ es igual a la interpretación de $q(\xi)$ en $V[\dot{P}] = V[\dot{P} \restriction \lambda'][\dot{P} \restriction \xi - \lambda']$.

Claramente φ es homomorfismo y 1-1. Veamos que la imágen de φ es densa en $M' * M(\kappa, \lambda - \lambda', V_1, W)$. Sea $((p, q), (\mathbf{p}, \mathbf{q})) \in M' * M(\kappa, \lambda - \lambda', V_1, W)$.

Tenemos que $(p, q) \Vdash \mathbf{p} \in P \restriction \lambda - \lambda'$, luego existe $(p', q') \leq (p, q)$ en M' y $p^* \in P \restriction \lambda - \lambda'$ tales que $(p', q') \Vdash_{M'} \mathbf{p} = p^*$.

Por hipótesis, en V_2, $(p', q') \Vdash_{M'}$ "$\mathbf{q}$ es una función de tamano $\leq \kappa$ tal que para todo $\xi \in Dom(\mathbf{q}), \Vdash_{P\restriction(\xi-\lambda')} \mathbf{q}(\xi) \in \mathbf{Q}(\xi)$". Luego en $V_2^{M'}$, cada $\mathbf{q}(\xi)$ es un nombre en el $P \restriction \xi - \lambda'$ de una función acotada sobre κ^+, con valores en 2. Luego, podemos considerar a cada $\mathbf{q}(\xi)$ como un conjunto de tuplas $(t, (\alpha, i))$ tales que $t \in P \restriction \xi - \lambda'$ y $(\alpha, i) \in \kappa^+ \times 2$.Como P es κ^+-c.c en W, cada $\mathbf{q}(\xi)$ tiene tamanõ $< \kappa^+$,entonces por el lma 3.10 obtenemos que existen $(p'', q'') \leq (p', q')$ en M' y $\mathbf{q}' \in V^{P\restriction\lambda'}$ tales que $(p'', q'') \Vdash_{M'} \mathbf{q} = \mathbf{q}'$. SPDG podemos suponer que $(p'', q'') = (p', q')$.

Finalmente, como $P \restriction \lambda'$ es κ^+-c.c en V_2, podemos suponer SPDG que $(p', q') \Vdash_{M'} Dom(\mathbf{q}') = D$ para algún $D \in V_2$. Tenemos asque para cada $\xi \in D$, $\mathbf{q}'(\xi)$ es un $P \restriction \lambda'$-nombre para un $P \restriction (\xi - \lambda')$-nombre, y así podemos considerar $[\mathbf{q}'(\xi)]^{P\restriction\xi}$, ya que $P \restriction \xi = P \restriction \lambda' \times P \restriction (\xi - \lambda')$. Definamos $q^*(\xi) = [\mathbf{q}'(\xi)]^{P \restriction \xi}$ para todo $\xi \in D$. Entonces $(p', q') \Vdash_{M'}$ "$q^*(\xi) \in \mathbf{Q}(\xi)$" para todo $\xi \in D$; ya que $(p', q') \Vdash_{M'}$ "$\mathbf{q}'(\xi)$ es un $P \restriction \lambda'$-nombre de un $P \restriction \xi - \lambda'$ nombre tal que $\Vdash_{P \restriction (\xi - \lambda')} \mathbf{q}'(\xi) \in \mathbf{Q}(\xi)$", usando el lema del producto.

Ahora consideremos $c = (p' {}^\frown p^*, q' {}^\frown q^*)$. Es fácil ver que $\varphi(c) \leq ((p, q), (\mathbf{p}, \mathbf{q}))$.

$\square$

revisar con cuidado

Demostración del teorema 3.1. El poset en cuestion es $M = M(\aleph_0, \lambda, V, V)$. Suponga que $\mathbf{T} \in V^M$ es un nombre para un λ-árbol de Aronzsajn. Como el conjunto de ordinales $\alpha < \lambda$ para los cuales $\mathbf{T} \restriction \alpha$ es un $M \restriction \alpha$-nombre es un cerrado no acotado en λ, al ser λ Π^1_1-indescriptible existe entonces un inaccesible $\eta < \lambda$ tal que $\mathbf{T} \restriction \eta$ es un $M \restriction \eta$-nombre de un árbol de Aronszajn en $V^{M \restriction \eta}$, ya que "$\mathbf{T}$ ~~no~~ es un λ-árbol de Aronszajn" » se puede expresar con una Π^1_1-sentencia en el modelo $(V_\lambda, M, \mathbf{T}, \in)$.

La sentencia es la siguiente: $\forall X \forall z((X(z) \to$ "z es un M-nombre"$) \to \exists x \exists y(X(x) \wedge X(y) \wedge \exists p \in M(p \Vdash_M x \wedge y$ ~~are~~ son incomparables ~~in~~ en $\mathbf{T})))$ tal que $\forall p(p \in P \Rightarrow \Vdash_p z \in T)$

$P(\aleph_0, \lambda)^V$ es $\aleph_1$-c.c en $V[\dot{M} \restriction \eta]$ ya que $P(\aleph_0, \lambda)^V \subseteq P(\aleph_0, \lambda)^{V[\dot{M} \restriction \eta]}$ y este último poset es $\aleph_1$-c.c. en $V[\dot{M} \restriction \eta]$. Entonces podemos aplicar el lema 3.12, y así forzar con $M(\aleph_0, \lambda, V, V[\dot{M} \restriction \eta])$ en $V[\dot{M} \restriction \eta]$ para llegar al modelo $V[\dot{M}]$. Recordemos también que por el lema 3.9, $M(\aleph_0, \lambda, V, V[\dot{M} \restriction \eta])$ es una proyección de $P(\aleph_0, \lambda)^{V_1} \times A^*(\aleph_0, \lambda, V_1, V_2[\dot{M} \restriction \eta])$. Como A^* es $\aleph_1$-cerrado en $V[\dot{M} \restriction \eta]$ y $2^\eta \geq \eta^{++}$ en este mismo universo por el lema 3.4, se obtiene que la interpretación de$\mathbf{T} \restriction \eta$ sigue sin tener ramas en $V_2[\dot{M} \restriction \eta][A^*]$ por el lema 2.7.

En $V[\dot{M}], \eta$ tiene cardinal $\aleph_1$ y $V[\dot{M}] \subseteq V_2[A^*][P]$, y P no colapsa cardinales mayores a $\aleph_1$ en $V_2[\dot{M} \restriction \eta][A^*]$, ya que P es $\aleph_1$-Knaster en este universo; de hecho en cualquier universo que extienda a V_1 de donde A^* colapsa a η en $V[M_0 \restriction \eta]$. Sin embargo, A^* es $\aleph_1$-cerrado en $V[\dot{M} \restriction \eta]$, por lo tanto $\mathrm{cf}(\eta) = \aleph_1$ en este universo. Entonces como P es $\aleph_1$-Knaster, se sigue que la interpretación de $\mathbf{T} \restriction \eta$ sigue sin tener ramas en $V[\dot{M} \restriction \eta][\dot{A}^*][\dot{P}] \supseteq V[\dot{M}_0]$, lo cual es contradictorio porque $\mathbf{T} \restriction \eta$ es un segmento inicial propio de $\mathbf{T}$.

En [5] se pregunta si de la existencia de dos cardinales débilmente compactos, se puede construir una extensión genérica donde $\aleph_2$ y $\aleph_3$ tengan la propiedad del árbol.

Pero sabemos por lo que se discutió en la introducción que para obtener la propiedad del árbol en $\aleph_2$ y $\aleph_3$ se necesitan hipótesis más fuertes.

4

La propiedad del árbol en dos cardinales consecutivos

La hipótesis del resultado de Mitchell es muchímo más débil que la del resultado de Abraham para el doble y triple sucesor de un cardinal regular.

Teorema 4.1. *(Abraham) Suponga que V es un modelo de* ZFC *donde existe un cardinal supercompacto κ_0 y un cardinal débilmente compacto $\lambda_0 > \kappa_0$. Entonces existe una extensión genérica $V[G]$ donde $\aleph_2$ y $\aleph_3$ tienen la propiedad del árbol, $2^{\aleph_0} = \kappa_0 = \aleph_2$ y $2^{\aleph_1} = \lambda_0 = \aleph_3 = 2^{\aleph_2}$.*

Vamos a tomar a λ_0 como el primer débilmente compacto por encima de κ_0. La idea es construir un poset R usando el cardinal κ_0, de manera que en V^R κ_0 sea $\aleph_2$, y construir cuidadosamente R usando la supercompacidad de κ_0 de manera que cuando se fuerce con $M_1 = M(\aleph_1, \lambda_0, V, V^R)$ en V^R, κ_0 siga teniendo la propiedad del árbol.

La idea es definir a R por etapas, similarmente a como se definió el poset de Mitchell, de manera que se cumpla lo siguiente. Suponga que existe un κ_0-árbol de Aronszajn T en $V[\dot{R} * \dot{M}_1]$. Se mostrará que T es un κ_0-árbol de Aronszajn en $V[\dot{R}][\dot{P}_1][\dot{A}_1^*]$, ~~donde~~ para algunos posets P_1 y A_1^*. Se extenderá un encaje $j : V \to N$ a un encaje elemental, ~~dado por la supercompacidad de κ_0~~ $j : V[\dot{R}][\dot{P}_1][A_1^*] \to N[j(R)^{\cdot}][j(P_1)^{\cdot}][j(A^*)^{\cdot}]$ de modo que $N^\lambda \subseteq N$, $j(\kappa_0) > \lambda$ y $crit(j) = \kappa_0$. La definición por etapas de R permitirá ver más o menos a $j(R) * (j(P_1) * j(A_1^*))/R * P_1 * A_1^*$, como cierta proyección de un producto de posets que cumplen cada uno alguna condición de la sección 2.1.2, de manera que T siga siendo un árbol sin ramas. Sin embargo **T** será un segmento inicial del $j(\kappa_0)$-árbol $j(T)$, con lo que se obtendrá una contradicción.

sea $W = V[\dot{R}][\dot{P}_1][\dot{A}_1^*]$ la nueva j
$j : W \to Y$ con $Y \not\subseteq W$
¡por lo tanto esto no da la superc. de $\aleph_2$!

Antes de definir el poset R, se expondrán algunos resultados sobre el poset $M(\kappa, \lambda, V_1, V_2)$.

Lema 4.2. *Suponga que P no agrega $<\kappa$-sucesiones. Entonces $\mathbf{A}(\kappa,\lambda,V_1,V_2)$ es κ-cerrado en $V_2[\dot{P}]$.(Luego $M(\kappa,\lambda,V_1,V_2)$ no introduce subconjuntos a V_2 de tamaño $<\kappa$.)*

a V_2

Demostración. Sea $(f_\alpha : \alpha < \mu)$ con $\mu < \kappa$ una sucesión $\leq_A$-decreciente de elementos de $\mathbf{A}(\kappa,\lambda,V_1,V_2)$ en $V_2[\dot{P}]$. Por la suposición sobre P tenemos que $(f_\alpha : \alpha < \mu) \in V_2$. Sea $p \in \dot{P}$ tal que $p \Vdash_P^{V_2} \forall \alpha < \beta < \mu (f_\alpha \leq_{\mathbf{A}} f_\beta)$. Definimos f de la siguiente manera: $Dom(f) = \bigcup\{Dom(f_\alpha) : \alpha < \mu\}$, ahora, como $Q(\alpha)$ es κ^+-cerrado en $V^{P\restriction\alpha}$, definimos $f(\alpha) \in V^{P\restriction\alpha}$ de manera que $\Vdash_{P\restriction\alpha}^{V_2} f(\alpha) \in \mathbf{Q}(\alpha)$ y $p \restriction \alpha \Vdash_{P\restriction\alpha}^{V_2}$ "$f(\alpha)$ es la unión de todos los $f_\beta(\alpha), \beta < \mu$",entonces $f \in V_2$ y así $f \in \mathbf{A}(\kappa,\lambda,V_1,V_2)$, además $p \Vdash_{P\restriction\alpha}^{V_2} \forall \alpha < \mu (f \leq_{\mathbf{A}} f_\alpha)$. □

El siguiente lema se usarará para demostrar que si $T \in V_2[\dot{M}_1]$ es un λ-árbol de Aronszajn, T lo seguirá siendo en $V_2[\dot{P}][\dot{A}^*]$; véase el lema 2.11 de [1].

Lema 4.3. *Suponga que P no adhiere $<\kappa$-sucesiones. Entonces $(P(\kappa,\lambda)^{V_1} \times A^*(\kappa,\lambda,V_1,V_2))/\dot{M}$ es κ-cerrado.*

a V_2

Durante el resto de la sección κ_0 será un supercompacto fijo, y λ_0 el primer débilmente compacto por encima de κ_0.

Notación 4.4. Para todo ordinal α, denotamos por α' es el primer cardinal débilmente compacto por encima de α en V_2, si éste existe.

Definición 4.5. Sean $V_1 \subseteq V_2$ modelos de ZFC donde κ_0 es un cardinal supercompacto en V_2. Sea $M = M(\aleph_0,\kappa_0,V_1,V_2)$. El poset $R(\aleph_0,\kappa_0,V_1,V_2)$ que definimos ahora es un conjunto de triplas de funciones. $R(\aleph_0,\kappa_0,V_1,V_2)|\alpha$ es el conjunto de las triplas de $R(\aleph_0,\kappa_0,V_1,V_2)$ cuyo dominio esta contenido en α. Para $(p,q,f) \in R(\aleph_0,\kappa_0,V_1,V_2)$, $(p,q,f)|\alpha = (p\restriction\alpha, q\restriction\alpha, f\restriction\alpha) \in R(\aleph_0,\kappa_0,V_1,V_2)$.

Se define inductivamente a $R(\aleph_0,\kappa_0,V_1,V_2)$, en V_2, como que el conjunto de triplas (p,q,f) que cumplen las siguientes condiciones:

- $(p,q) \in M$;
- $f \in V_2, |f| \leq \kappa$, todos los elementos de $dom(f)$ son inaccesibles límites de cardinales débilmente compactos, y además para todo $\alpha \in dom(f)$, $\Vdash_{R|\alpha} f(\alpha) \in A^*(\aleph_1,\alpha',V_1,V_2^{R|\alpha})$.

Ordenado de la siguiente manera $(p',q',f') \leq (p,q,f)$ sii $(p',q') \leq_{M_0} (p,q)$ y $\alpha \in Dom(f) \Rightarrow \alpha \in Dom(f')$ y $(p',q',f')|\alpha \Vdash_{R|\alpha}$ "$f'(\alpha) \leq f(\alpha)$ en $M(\kappa,\kappa_0,V_1,V_1^{R|\alpha})$.

Notemos que como el conjunto de parejas de funciones que conforman a M no están definidas en cardinales límites, obtenemos que si α es inaccesible límite de cardinales débilmente compactos, $R|\alpha+1 = R|\alpha * A^*(\aleph_1, \alpha', V, V^R)$.

Puede parecer extraño que los elementos del dominio de f sean este tipo de inaccesibles, pero es para que suceda lo siguiente: si $\alpha < \beta$ son de este tipo de inaccesibles, $\alpha' < \beta$, y luego es fácil ver por la definición de R que $R \restriction \beta$ es un subposet completo de $R \restriction \alpha$.

La idea de R en [1] es la de usar algunas propiedades de reflexividad y reflejar, más o menos, el forzamiento $R * M(\aleph_1, \lambda_0, V, V^R)$, a algún $R|\alpha+1 = R|\alpha * A^*(\aleph_1, \alpha', V, V^R)$ y obtener una contradicción similar a la que obtuvimos en la demostración del teorema 3.6.

En su lugar, u

Sin embargo, en esta monografía no usaremos el argumento de reflexión de Abraham ~~usando~~ supercompacidad. Usaremos la caracterización de los supercompactos con encajes elementales, ~~pero en el fondo se usarán~~ las ideas de Abraham.

basado en la

aunque la estructura de la prueba usa

Usando el poset que definimos a continuación, se obtendrá que $R(\aleph_0, \kappa_0, V_1, V_2)$ es una proyección de dos posets como se indicó al comienzo, que se comporta similarmente a la proyección que se obtuvo para el poset de Mitchell.

Definición 4.6. Sea $U(\aleph_0, \kappa_0, V_1, V_2) = \{(1_{P_0}, q, f) : (1_{P_0}, q, f) \in R(\aleph_0, \kappa_0, V_1, V_2)\}$ ordenado como subposet de $R(\aleph_0, \kappa_0, V_1, V_2)$.

Lema 4.7. *Sean* $P_0 = P(\aleph_0, \kappa_0)^{V_1}$, $R = R(\aleph_0, \kappa_0, V_1, V_2)$ *y* $U = U(\aleph_0, \kappa_0, V_1, V_2)$.

1. $\pi : P_0 \times U \to R$ *dada por* $(p, (1, q, f)) \mapsto (p, q, f)$ *es una proyección.*

2. U *es* $\aleph_1$*-cerrado en* V_2.

~~*Esto también vale para* $P_0|(\alpha+1), U|(\alpha+1), R|(\alpha+1)$, *donde* $\alpha < \kappa_0$ *es un inaccesible límite de cardinales débilmente compactos.*~~

Demostración. 1. Claramente π es sobre R y es homomorfismo. Sean $(p', q', f') \leq (p, q, f) = \pi(p, (1, q, f))$, se quiere encontrar $(1, q^*, f^*) \leq (1, q, f)$ tal que $[(p', q^*, f^*)] = [(p', q', f')]$ en R. Por el lema 3.9 existe q^* tal que $(1, q^*) \leq_{A^*} (1, q)$. Definifmo $dom(f^*) = dom(f')$. Definimos para $\alpha \in dom(f^*)$, $f^*(\alpha) \in V^{R|\alpha}$ tal que $(p', q', f')|\alpha \Vdash_{R|\alpha} f^*(\alpha) = f'(\alpha)$, y para $r \in R|\alpha$ incompatible con $(p', q', f')|\alpha$, $r \Vdash_{R|\alpha} f^*(\alpha) = f(\alpha)$. Como $(p', q', f') \Vdash_{R|\alpha} f'(\alpha) \leq f(\alpha)$, se sigue que $\Vdash_{R|\alpha} f^*(\alpha) \leq f(\alpha)$. Por inducción sobre α, $[(p', q', f')|\alpha] = [(p^*, q^*, f^*)|\alpha]$, y es claro que $(1, q^*, f^*) \leq (1, q, f)$.

2. Suponga que $\langle (1, q_\alpha, f_\alpha) : \alpha < \mu \rangle$, $\mu < \aleph_1$ es una sucesión decreciente de elementos de U. Como $\langle (1, q_\alpha) : \alpha < \mu \rangle$ es una sucesión decreciente de elementos de $A^*(\aleph_0, \kappa_0, V_1, V_2)$, existe $(0, q^*) \in A^*(\aleph_0, \kappa_0, V_1, V_2)$ que es ínfimo de la sucesión $\langle (1, q_\alpha) : \alpha < \mu \rangle$ por el lema 3.8.

Ahora definimos una función f. Primero $Dom(f) = \bigcup_{\alpha<\mu} Dom(f_\alpha)$. $f(\beta)$ se define inductivamente de manera que $(1, q, f)|\beta + 1 \leq (1, q_\alpha, f_\alpha)|\beta + 1$ para todo $\alpha < \mu$. Como $\alpha < \alpha' < \mu$ implica que $(0, q_{\alpha'}, f_{\alpha'})|\beta \Vdash_{R|\beta} f_{\alpha'}(\beta) \leq f_\alpha(\beta)$ para todo $\alpha < \alpha' < \mu$, y así por la hipótesis inductiva obtenemos que $(0, q, f)|\beta \Vdash_{R|\beta} f_{\alpha'}(\beta) \leq f_\alpha(\beta)$, y así como $A^*(\kappa, \beta', V, V^{R|\beta})$ es $\aleph_1$-cerrado, existe $f(\beta)$ tal que $(0, q, f)|\beta \Vdash_{R|\beta} f(\beta) \leq f_\alpha(\beta)$ para todo $\alpha < \mu$, y así $(1, q, f)|\beta + 1 \leq (1, q_\alpha, f_\alpha)|\beta + 1$. Notemos que esta demostración también funciona para $R|(\alpha + 1)$, $\alpha < \kappa_0$ inaccesible límite de cardinales débilmente compactos

$\square$

Este lema nos ayudará más adelante con la aritmética cardinal del modelo V^R.

Lema 4.8. *Sea $R = R(\aleph_0, \kappa_0, V_1, V_2)$ y $\lambda \geq \kappa_0$ inaccesible.*

(a) R satisface la propiedad $(\cancel{K})$ κ_0-Knaster *para κ_0 en V*

(b) Si α $\leq \kappa_0$ *es inaccesible límite de débilmente compactos, todos los conjuntos* ~~de~~ *contables de ordinales de $V^{R|\alpha+1}$ pertenecen a $V^{P_0|\alpha+1}$.*

(c) $P(\aleph_1, \lambda)^V$ no agrega subconjuntos contables a V^R.

(d) $P(\aleph_1, \lambda)^V$ satisface la propiedad $(\cancel{K})$ κ_0 Knaster *para κ_0 en V^R.*

Demostración. (a) Similar a la demostración de 3.6.

(b) Por el lema 4.7(1) existe una proyección $\pi : P_0 \restriction \beta \times U|\beta \to R|\beta$; $\beta = \alpha + 1$, $U \restriction \beta$ es $\aleph_1-$cerrado en V, y $P_0 \restriction \beta$ es $\aleph_1$-Knaster en $V^{U\restriction\beta}$, luego usando la idea de la prueba del lema 3.10 se obtiene que todo conjunto contable de $V^{R\restriction\beta}$ pertenece a $V^{P_0\restriction\beta}$.

Los incisos $[c]$ y $[d]$ se prueban en el lema 2.16 de [1]. $\square$

Colorario 4.9. *En V^R todos los cardinales $\leq \aleph_1$ se preservan, κ_0 se preserva, y aun más $2^{\aleph_0} = \kappa_0$ y $\kappa_0 = (\aleph_2)^{V^R}$.*

Demostración. Como todos los conjuntos de ordinales de tamaño $\leq \aleph_0$ de V^R pertenecen a V^P, se sique g que como P es $\aleph_1$-c.c en V, $\aleph_1$ se preserva en V^R.

$\square$

Ahora se quiere probar un análogo al lema 3.13, para hacer esto necesitamos la siguiente definición.

Definición 4.10. Sea $T(\aleph_0, \kappa_0, V, V) := \{(1, 1, f) : (1, 1, f) \in R(\aleph_0, \kappa_0, V, V)\}$ ordenado como subposet de $R(\aleph_0, \kappa_0, V, V)$.

Lema 4.11. *1. La función $\pi : M(\aleph_0, \kappa_0, V, V) \times T(\aleph_0, \kappa_0, V, V) \rightarrow R(\aleph_0, \kappa_0, V, V)$, dada por $((p, q), f) \mapsto (p, q, f)$ es una proyección.*

2. T es $\aleph_1$-cerrado en V.

Demostración. 1. Claramente π es un homomorfismo sobre R. Sea $(p, q, f) \in R$ y suponga que $(p, q, f) \leq (p', q', f') = \pi((p', q'), f')$. Queremos encontrar f^* tal que $f^* \leq_T f'$ y $[(p, q, f)] = [(p', q', f')]$ en R. Definimos $Dom(f^*) = Dom(f')$. Para cada $\beta \in Dom(f^*)$ elegimos un $R|\beta$-nombre $f^*(\beta)$ tal que $(p, q, f)|\beta \Vdash_{R|\beta} f^*(\beta) = f(\beta)$ y para r incompatible con $(p, q, f)|\beta$ en $R|\beta$, $r \Vdash_{R|\beta} f^*(\beta) = f'(\beta)$. Entonces es fácil demostrar por inducción sobre β que $[(p, q, f)|\beta] = [(p, q, f^*)|\beta]$ en $R|\beta$ para todo $\beta < \kappa_0$, también por inducción se prueba sin dificultad que $(1, 1, f^*) \leq_R (1, 1, f')$

2. Suponga que $(f_\alpha : \alpha < \aleph_0)$ es una sucesión $\leq_T$-decreciente. Definamos f de la siguiente forma. $dom(f) = \bigcup_{\alpha<\kappa} dom(f_\alpha)$. Para cada $\beta \in dom(f)$, sea α_β el primer cardinal $< \kappa$ tal que $\beta \in dom(f_{\alpha_\beta})$. Luego, para cada $\beta \in dom(f)$, $\Vdash_{R|\beta}$ "$\langle f_\gamma(\beta) : \alpha_\beta \leq \gamma < \aleph_0\}\rangle$ es una sucesión decreciente de elementos de $A^*(\aleph_1, \beta', V, V^{R|\beta})$", sin embargo $\Vdash_{R|\beta}$“$A^*(\aleph_1, \beta', V, V^{R|\beta})$ es $\aleph_2$-cerrado”, entonces existe un $R|\beta$-nombre $f(\beta)$ tal que $\Vdash_{R|\beta}$ "$f(\beta)$ es una cota inferior de la sucesión $\langle f_\gamma(\beta) : \alpha_\beta \leq \gamma < \aleph_0\rangle$ en $A^*(\aleph_1, \beta', V, V^{R|\beta})$". Es fácil probar por inducción sobre β que f es una cota inferior de la sucesión $(f_\alpha : \alpha < \aleph_0)$.

□

Ahora notemos lo siguiente. Si $(p, q) \in M(\aleph_0, \kappa_0, V, V^{R|\beta})$, entonces para cada $\alpha \in dom(q)$ se tiene que $q(\alpha)$ es un $P \upharpoonright \alpha$ nombre en $V^{R|\beta}$, de una función de tamaño $\leq \aleph_0$ contenida en $\kappa^+ \times 2$, sin embargo como P es $\aleph_1$-c.c en V^R, $P \upharpoonright \alpha$ es $\aleph_1$-c.c en $V^{R|\beta}$, y como $q(\alpha) \in V^{R|\beta} \subseteq V^{M*T}$, por el lema anterior se obtiene que $q(\alpha) \in V^M$ para todo $\alpha < \kappa_0$. Sin embargo $|q| \leq \aleph_0$ pertenece a $V^{R\upharpoonright\alpha} \subseteq V^{M*T}$, así $q \in V^M$.

Definición 4.12. Dado α inaccesible límite de débilmente compactos y $\beta = \alpha + 1$, $R(\aleph_0, \kappa_0 - \beta, V, V[\dot{R}|\beta])$ es el conjunto de triplas de $R(\aleph_0, \kappa_0, V, V[\dot{R}|\beta])$ cuyos dominios están contenidos en $\kappa_0 - \beta$.

Teniendo esto en cuenta, demostremos el siguiente lema.

Lema 4.13. *Sea $\alpha < \kappa_0$ inaccesible límite de cardinales débilmente compactos $< \kappa_0$. Entonces $R/\dot{R}_{\alpha+1} \cong R(\aleph_0, \kappa - \beta, V, V[\dot{R}_{\alpha+1}]))$, si $\dot{R}_{\alpha+1}$ es $R|(\alpha+1)$-genérico sobre V.*

Demostración. Sean $M' = M(\aleph_0, \kappa_0, V_1, V_2^{M\upharpoonright\alpha})$ y $\beta = \alpha + 1$.

Defina $\psi : R \longrightarrow R \upharpoonright \beta * R(\aleph_0, \kappa_0 - \beta, V_1, V_2^{R\upharpoonright\beta})$ por

$$(p, q, f) \longmapsto ((p \upharpoonright \beta, q \upharpoonright \beta, f \upharpoonright \beta), (\bar{p}, \bar{q}, \bar{f})),$$

donde $((p \restriction \beta, q \restriction \beta), (\bar{p}, \bar{q})) = \varphi(p,q)$, siendo $\varphi : M(\aleph_0, \kappa_0, V, V) \longrightarrow M(\aleph_0, \alpha, V, V) * M(\aleph_0, \kappa_0 - \alpha, V, V^{M'})$ la función definida en la demostración del lema 3.12. Esta definión es válida por la observación que hicimos antes de este lema. $dom(\bar{f}) = dom(f) \cap (\kappa_0 - \beta)$, y para todo ξ en este conjunto, $\bar{f}(\xi) = [f(\xi)]^{R\restriction\beta}$ considerando $R \restriction \xi = R \restriction (\xi - \beta) \times R \restriction \beta$ ya que $f(\xi) \in V^{R\restriction\xi}$.

Claramente ψ es un homomorfismo. Veamos que la imagen de ψ es densa en $R \restriction \beta * R(\aleph_0, \kappa_0 - \beta, V, V^{R\restriction\beta})$. Sea $(a, (\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{f})) \in R \restriction \beta * R(\aleph_0, \kappa_0 - \beta, V, V^{R\restriction\beta})$, donde $a = (p, f, q)$.

Por la demostración del lema 3.12 existe $(p', q') \in M(\aleph_0, \kappa_0, V_1, V_2)$ tal que $\varphi(p', q') \leq ((p,q), (\mathbf{p}, \mathbf{q}))$ en $M(\aleph_0, \kappa_0, V, V) * M(\aleph_0, \kappa_0, V, V^{M'})$.

En $V^{R\restriction\beta}$ tenemos que para todo $\eta \in dom(\mathbf{f})$, $\mathbf{f}(\eta)$ es un $P \restriction \eta$ nombre de una función de tamano $\leq \aleph_0$, entonces como P_0 es $\aleph_1$-c.c en V^R, $\mathbf{f}(\eta) \in V^{P\restriction\beta}$ por el lema 4.8(b).

Existe $b \leq (p' \restriction \beta, q' \restriction \beta, f \restriction \beta)$ en $R \restriction \beta$ tal que $b \Vdash_{R\restriction\beta} \mathbf{f} = \mathbf{f}'$ para algún $\mathbf{f}' \in V^{P\restriction\beta}$. Sin embargo $P \restriction \beta$ es $\aleph_1$-c.c en V, luego como en $V^{P\restriction\beta}, \mathbf{f}'$ es una función de tamaño $\leq \aleph_0$ podemos cubrir su dominio con un conjunto de V de tamaño $\aleph_0$, entonces podemos suponer SPDG que $b \Vdash_{R\restriction\beta} dom(\mathbf{f}') = D$ para algún $D \in V, D \subseteq \kappa - \beta$.

Entonces definamos $g \in V$ por $dom(q) = D$ y $g(\xi) = [\mathbf{f}'(\xi)]^{R\restriction\xi}$, donde consideramos a $R \restriction \xi$ como $R \restriction \beta \times R \restriction (\xi - \beta)$, ya que $\mathbf{f}'(\xi)$ es un $R \restriction$-nombre para un $R \restriction (\xi - \beta)$-nombre. Entonces si $c = (p', q', f \restriction \beta^\frown g)$, es claro que $\psi(c) \leq (a, ((\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{f}))$. □

$\beta+1$

Como en $V^{R|\beta+1}$ se tiene que $\beta < \kappa_0$, y κ_0 sigue siendo supercompacto en $R|\beta$; ya que $|R|\beta| = \beta < \kappa_0$, tenemos que en $V^{R|\beta}$, $R(\aleph_0, \kappa_0 - \beta, V, V^{R|\beta}) \cong R(\aleph_0, \kappa_0, V, V^{R|\beta})$, considerando la función $F : \kappa_0 \to \kappa_0 - \beta$ dada por $F(\alpha) = \beta + \alpha$, al correr los dominios con esta función.

Colorario 4.14. *Dado $\alpha < \kappa_0$ inaccesible límite de cardinales débilmente compactos, sea $\beta = \alpha + 1$. Existe un poset $U_{\alpha+1}$ $\aleph_1$-cerrado en $V^{R|\beta}$ y una proyección $\pi : P(\aleph_0, \kappa_0)^{V_1} \times U_{\alpha+1} \longrightarrow R/\dot{R}_{\alpha+1}$*

Demostración. Consecuencia inmediata del lema anterior y la nota hecha después de este. □

Poset Final 4.15. Fijemos $R = R(\aleph_0, \kappa_0, V, V)$. En V^R sea $M_1 = M(\aleph_1, \cancel{\lambda}, V, V^R)$. λ_0
El forzamiento final que se usará para probar el teorema 4.1 es $R * M_1$. La demostración de que la extensión genérica por medio de este poset cumple las propiedades indicadas en ~~2.1~~ se divide en tres partes: en V^R

el enunciado del teorema 4.1

I. $\aleph_1^V$ se preserva, κ_0 se convierte en $\aleph_2$ y λ_0 en $\aleph_3$. También $2^{\aleph_0} = \aleph_2, 2^{\aleph_1} = 2^{\aleph_2} = \aleph_3$.

II. ω_3 tiene la propiedad del árbol.

III. ω_2 tiene la propiedad del árbol.

Demostracion de I ~~4.16.~~ Veamos que $\aleph_1$ no se colapsa. Primero, por 4.8(b), $\aleph_1^{V^R} = \aleph_1^{V^{P_0}}$, pero P_0 es c.c.c. en V, luego $\aleph_1^{V^R} = \aleph_1^V$. Por 4.8($c$), $P(\aleph_1, \lambda)^V$ no agrega conjuntos contables de ordinales a V^R, entonces por el lema 4.2 se sigue que M_1 no agrega subconjuntos contables a V^R, por lo tanto $\aleph_1^V = \aleph_1^{V^R} = \aleph_1^{V^{R*M_1}}$.

Como en V^M todos los ordinales $\aleph_0 < \gamma < \kappa_0$ tienen cardinal $\aleph_1$, entonces $(\kappa_0 \leq \aleph_2)^{V^M}$, y por lo tanto como $V^M \subseteq V^R$, se sigue que $(\kappa_0 \leq \aleph_2)^{V^R}$, sin embargo R es κ_0-c.c en V^R por el lema 4.8(a), de donde $V^R \models \kappa_0 = \aleph_2$, ya que κ_0 se preserva en V^R.

sigue siendo un cardinal

λ_0 ~~se preserva~~ ya que $R * M_1$ es λ_0-c.c, ya que R es λ_0-c.c; pues ~~ya que~~ es κ_0-c.c, y además $\Vdash_R M_1$ es λ_0-c.c

Demostracion de II ~~4.17.~~ Suponga por el contrario que $T \in V[\dot{R}][\dot{M}_1]$ es un λ_0-árbol de Aronzsajn. Como $|R| = \kappa_0 < \lambda_0$, λ_0 sigue siendo un cardinal débilmente compacto en $V[\dot{R}]$. Existe un cardinal inaccesible $\kappa_0 < \eta' < \lambda_0$ tal que $T \restriction \eta'$ es un η'-árbol de Aronszajn en $V[\dot{R}][\dot{M}_1|\eta]$. Veamos que al forzar con $M_1/\dot{M}_1|\eta'$ en $V[\dot{R}][\dot{M}_1|\eta']$, T sigue siendo un λ-árbol de Aronszajn. usar Π^1_1-refl.

Lema 4.18. *$P(\aleph_1, \lambda)^V$ tienen la propiedad* ~~(K)~~ $\aleph_2$-Knaster *para $\aleph_2$ en $V[\dot{R}][\dot{M}_1|\eta']$.*

Demostración. Notemos que todo conjunto de ordinales de tamaño $\aleph_1$ de $V[\dot{R}][\dot{M}_1|\eta']$ se puede cubrir con un conjunto de V^R de cardinalidad $\aleph_1$; ya que M_1 es proyección de $P(\aleph_1, \lambda_0) \times A_1^*(\aleph_2, \lambda_0, V, V^R)$. Pero $P(\aleph_1, \lambda_0)$ es κ_0-Knaster por el lema 4.8(d), y $A_1^*(\aleph_2, \lambda_0, V, V^R)$ es κ_0-cerrado en $V[\dot{R}]$.

luego todo conjunto de ordinales de $V[\dot{R}]$ de tamaño $\aleph_1$ se puede cubrir con un conjunto de V de tamaño $\aleph_1$ en$V[\dot{R}]$. Por 4.8(d), $P(\aleph_1, \eta')$ es $\aleph_2$-c.c. en $V[\dot{R}]$, luego todo conjunto de ordinales de $V[\dot{R}][\dot{M}_1]$se puede cubrir con un conjunto de $V[\dot{R}]$ de tamaño $\aleph_1$.

Ahora el lema es consecuencia inmediata del lema 2.1 □

Ahora podemos aplicar el lema y obtener que

$$M_1/\dot{M}_1|\eta' \equiv M(\kappa, \lambda - \eta', V, V[\dot{R}][M_1|\eta']),$$

pero claramente $M(\kappa, \lambda - \eta', V, V[\dot{R}][M_1|\eta'])$ es equivalente al forzamiento $M(\kappa, \lambda, V, V[\dot{R}][M_1|\eta'])$, por lo tanto para terminar la prueba de **II**, basta demostrar el siguiente lema.

Lema 4.19. *Sea T un ω_3-árbol de Aronszajn en $V[\dot{R}][M_1|\eta']$. Entonces aunque ω_3 se colapsa a $\aleph_2$, T sigue sin tener ramas cofinales en la extensión por $M(\aleph_1, \lambda, V, V[\dot{R}][M_1|\eta'])$.*

Demostración. Tenemos por el lema 3.9 $M(\aleph_1, \lambda, V, V[\dot{R}]\ [M_1|\eta'])$ es una proyección de $P(\aleph_1, \lambda)^V \times A^*(\aleph_1, \lambda, V, V[\dot{R}][M_1|\eta'])$ y también tenemos que $A^*(\aleph_1, \lambda, V, V[\dot{R}][M_1|\eta'])$ es $\aleph_2$-cerrado en $V[\dot{R}][M_1|\eta']$ por el lema 3.8 Por I, $2^{\aleph}_0 = \aleph_2$ y $2^{\aleph}_1 = \aleph_3$ en $V[\dot{R}][\dot{M}_1|\eta']$, luego por el lema 2.7, T no tiene ramas cofinales en $V[\dot{R}][\dot{M}_1|\eta'][\dot{Q}^*]$.

Por 4.8 (b) $P(\aleph_1, \lambda)^V$ tiene la propiedad (K) para $\aleph_2$ en $V[\dot{R}][\dot{M}_1|\eta'][\dot{A}^*]$, sin embargo en $V[\dot{R}][\dot{M}_1]$, $|\omega_3^{V[\dot{R}][\dot{M}_1|\eta']}| = \omega_2$, y se tiene que $V[\dot{R}][\dot{M}_1] \subseteq V[\dot{R}][\dot{P}_1][\dot{A}^*]$ pero acabamos de ver que $P(\aleph_1, \lambda)^V$ no colapsa cardinales mayores o iguales que ω_2 en $V[\dot{R}][\dot{M}_1|\eta']$, por lo tanto como $A^* \times P \cong P \times A^*$ se debe tener que A^* colapsa a ω_3 en $V[\dot{R}][\dot{M}_1|\eta']$. Sin embargo, por el lema 3.8, A^* es $\aleph_2$-cerrado en $V[\dot{R}][\dot{M}_1|\eta']$, con lo que se debe tener que $\mathrm{cf}(\omega_3^{V[\dot{R}][\dot{M}_1|\eta']}) = \omega_2$ en $V[\dot{R}][\dot{M}_1|\eta'][\dot{A}^*]$. Entonces si se aplica el lema 2.5 se obtiene que T sigue sin tener ramas cofinales ya que $P(\aleph_1, \lambda)^V$ sigue teniendo la propiedad (K) para ω_2 en $V[\dot{R}][\dot{M}_1|\eta'][\dot{A}^*]$ al ser A^* $\aleph_2$-cerrado en $V[\dot{R}][\dot{M}_1|\eta']$. □

Demostracion de III ~~4.20~~. Tomamos ideas de [3] para esta demostración.

Sea $j : V \longrightarrow N$ un encaje elemental, donde N es una clase transitiva tal que $crit(j) = \kappa_0$, $j(\kappa_0) > \lambda_0$ y $N^{\lambda_0} \subseteq N$.

Fijemos $P_1 := P(\aleph_1, \lambda_0)^{\cancel{N}}$ V y $A^* = A(\aleph_1, \lambda_0, V, V^R)$.

Primero vamos a levantar el encaje $j : V \longrightarrow N$ a un encaje elemental $j : V[\dot{R}][\dot{P}_1][\dot{A}^*] \longrightarrow N'$, donde N' es alguna extensión genérica de N.

Esto lo haremos en tres pasos. (y $N' \not\subseteq V[R][\dot{P}_1][\dot{A}^*]$)

Paso 1 Afirmamos que $j(R)|\kappa + 1 = R * A^*(\aleph_1, \lambda_0, V, V^R)$. Como $N^{<\lambda_0} \subseteq N$, tenemos que cualquier cardinal $\kappa_0 < \gamma < \lambda_0$ no es cardinal débilmente compacto en N; ya que $\gamma \to (\gamma)^2_2$ tiene un contraejemplo en N. También tenemos que como $N^{\lambda_0} \subseteq N$, entonces $(\lambda_0 \to (\lambda_0)^2_2)^N$, y por lo tanto en N, λ_0 es el primer cardinal débilmente compacto mayor que κ_0 en N. Esto también se debe tener en $N[\dot{R}]$; ya que $|R| < \lambda_0$, y por lo tanto λ_0 sigue siendo débilmente compacto en $N[\dot{R}]$, y además todo débilmente compacto de $N[\dot{R}]$ también lo es en N, y así λ_0 sigue siendo el primer débilmente compacto por encima de κ_0 en $N[\dot{R}]$.

Fy

dar el argumento (con la coloración y el hom.)

Se sigue que $j(R)|\kappa_0 + 1 = R * A^*(\aleph_1, \lambda_0, N, N^R) = R * A^*(\aleph_1, \lambda_0, V, V^R)$, ya que R es κ_0-c.c y $N^{\lambda_0} \subseteq N$. Luego $R \subseteq_c j(R)$ es un subposet completo.

κ_0

Sin embargo como ~~*crti*~~ crit$(j) = \kappa_0$, se sigue que $j : R \to j(R)$ es la simplemente la inmersióón de R en $j(R)$. Por lo tanto podemos levantar el encaje $j : V \to N$ a agregar DÓNDE se usa el lema de Silver

un encaje elemental $j : V[\dot{R}] \to N[j(R)^{\cdot}]$, donde$(j(R))^{\cdot}$ es un filtro $j(R)$-genérico sobre V; y por lo tanto también sobre N, y $\dot{R} = j(R) \restriction \kappa_0$; ya que R es subposet completo de $j(R)$.

[Levantar j a $j : V[\dot{R}][\dot{P}_1] \longrightarrow N[j(R)][\dot{P}(\aleph_1, j(\lambda_0))]$]

Paso 2 Sea $P_1 := P(\aleph_1, \lambda_0)^V$, y sea $\dot{P}_1$ un filtro P_1-genérico sobre $V[(j(R))^{\cdot}]$. Claramente $j \restriction P_1 : P_1 \longrightarrow P(\aleph_1, j''\lambda_0)$ es un isomorfismo. Sea $\dot{P}(\aleph_1, j''\lambda_0) := j''\dot{P}(\aleph_1, \lambda_0)$, entonces este conjunto es $P(\aleph_1, j''\lambda_0)^V$-genérico sobre $V[(j(R))^{\cdot}]$, y tendremos que $V[(j(R))^{\cdot}][\dot{P}(\aleph_1, j''\lambda_0)] = V[(j(R))^{\cdot}][\dot{P}_1]$, ya que $P(\aleph_1, j''\lambda_0)^V$ y P_1 son isomorfos, como acabamos de ver.

Sea $\dot{P}(\aleph_1, j(\lambda_0) - j''\lambda_0)^V$, $P(\aleph_1, j(\lambda_0) - j''\lambda_0)^M$-genérico sobre $V[(j(R))^{\cdot}][\dot{P}_1]$, para así obtener $\dot{P}(\aleph_1, j(\lambda_0)) := \cancel{\dot{P}_1}$ $\dot{P}(\aleph_1, j''\lambda_0)$ $\times \dot{P}(\aleph_1, j(\lambda_0) - j''\lambda_0)$ filtro $P(\aleph_1, j(\lambda_0))^V$-genérico sobre $V[(j(R))^{\cdot}]$, por el lema del producto. Note que $j''\dot{P}_1 \subseteq \dot{P}(\aleph_1, j(\lambda_0))$.

Así, de nuevo podemos aplicar el Lema de Silver

Como $\dot{P}_1$ es también P_1 genérico sobre $N[\dot{R}]$, se sigue que como $j''\dot{P}_1 \subseteq \dot{P}(\aleph_1, j(\lambda_0))$, el encaje $j : V[\dot{R}] \longrightarrow N[(j(R))^{\cdot}]$, se puede extender a un encaje $j : V[\dot{R}][\dot{P}_1] \longrightarrow N[j(R)^{\cdot}][\dot{P}(\aleph_1, j(\lambda_0))]$.

explicar

Paso 3 Tenemos para el encaje $j : V[\dot{R}] \longrightarrow N[j(R)^{\cdot}]$, $j(A^*) = A^*(\aleph_1, j(\lambda_0), N, N[j(R)^{\cdot}])$. Notemos que como $j''\dot{A}^*$ es una subclase de $N[\dot{R} * \dot{A}^*]$ de tamaño $\leq \lambda_0$ se sigue que $j''\dot{A}^* \in N[\dot{R} * \dot{A}^*] \subseteq N[j(R)^{\cdot}]$, ya que $R * A^*$ es λ_0-c.c y por la clausura de N. Sin embargo, en $N[j(R)^{\cdot}]$, $j''A^*$ tiene tamaño a lo más $\aleph_1$ y es subconjunto de $j(A^*)$, el cual es un poset $j(\kappa_0)$-cerrado; A^* es κ_0-cerrado en $V[\dot{R}]$, luego existe una condición $t \in j(A^*)$ tal que $t \leq j(q)$ para todo $q \in \dot{A}^*$.

explicar

Sea $j(A^*)^{\cdot}$ un filtro $j(A^*)$-genérico sobre $\cancel{N}$ V $[j(R)^{\cdot}][j(P_1)^{\cdot}]$ tal que $j(A^*)^{\cdot} \ni t$. Entonces para todo $q \in \dot{A}^*$, $j(q) \in j(A^*)^{\cdot}$, y así podemos levantar el encaje $j : V[\dot{R}][\dot{P}_1] \longrightarrow N[j(R)^{\cdot}][\dot{P}(\aleph_1, j(\lambda_0))]$, a un encaje $j : V[\dot{R}][\dot{P}_1][\dot{A}^*] \longrightarrow N[j(R)^{\cdot}][j(P_1)^{\cdot}][j(A^*)^{\cdot}]$.

como $\dot{A}^* \subset j(A^*)^{\cdot}$ por Silver

Ahora podemos concluir la prueba de III de la siguiente manera.

Suponga que T es un κ_0 árbol de Aronszajn en $V[\dot{R} * \dot{M}_1]$, tal que el universo de T es κ_0. Tenemos que como en $V[\dot{R} * \dot{M}_1]$, $2^{\aleph_0} = \aleph_2 = \kappa_0$ y $(P_1 \times A^*)/\dot{M}_1$ es $\aleph_1$-cerrado en $V[\dot{R} * \dot{M}_1]$ por el lema 4.3 y el lema 4.8(c). Por el teorema 1.5 se sigue que T no tiene ramas cofinales en $V[\dot{R}][\dot{P}_1][\dot{A}^*]$.

Por la demostración de I sabemos que en $V[\dot{R}][\dot{P}_1][\dot{A}^*] = V[\dot{R}][\dot{A}^*][\dot{P}_1]$, $\kappa_0 = \aleph_2$. Tenemos $P(\aleph_1, j(\lambda_0))^V / \dot{P}(\aleph_1, \lambda_0)^V = P(\aleph_1, j(\lambda_0) - \lambda_0)^V$, pero este poset es κ_0-Knaster en $V[\dot{R}][\dot{P}_1][\dot{A}^*]$; esto se demostrará en el lema 4.21, entonces en $V[\dot{R}][\dot{A}^*][j(P_1)^{\cdot}]$, T sigue siendo un κ_0-árbol de Aronszajn. Es decir, como $j(R)|(\kappa + 1) \cong R * A^*$, T no tiene ramas cofinales en $V[j(R)^{\cdot}|\kappa + 1][j(P_1)^{\cdot}] = V[j(P_1)^{\cdot}][j(R)^{\cdot}|\kappa + 1]$.

Por el corolario 4.13 sabemos que $j(R)/j(R)^{\cdot}|\kappa+1$ es proyección de $P(\aleph_0, j(\lambda_0))^N \times U_{\kappa+1}$, donde $U_{\kappa+1} := U(\aleph_0, j(\kappa_0), N, N[j(R)^{\cdot}|\kappa+1])$. Note que $U_{\kappa+1}$ es $\aleph_1$-cerrado en $N[j(R)^{\cdot}|\kappa+1]$, luego T sigue sin tener ramas en $N[j(R)^{\cdot}|\kappa+1][U_{\kappa+1}]$.

Se debe tener que en $N[j(R)^{\cdot}|\kappa+1][U_{\kappa+1}]$, κ_0 se colapsa a un ordinal de cardinal $\aleph_1$ y cofinalidad ω_1. Si κ_0 no tuviera cardinalidad $\aleph_1$ en este modelo, se seguría que κ_0 no tendría cardinalidad $\aleph_1$ en $N[j(R)^{\cdot}|\kappa+1][U_{\kappa+1}][\dot{P}(\aleph_0, j(\lambda_0))^N]$ ya que $P(\aleph_0, j(\lambda_0))^N$ es $\aleph_1$-Knaster en $N[j(R)^{\cdot}|\kappa+1][U_{\kappa+1}]$, lo cual sería contradictorio. La cofinalidad de κ_0 debe ser ω_1 porque $U_{\kappa+1}$ es $\aleph_1$-cerrado.

Es claro que $P(\aleph_0, j(\kappa_0))^N$ es $\aleph_1$-Knaster en $N[j(P_1)^{\cdot}][j(R)^{\cdot}|\kappa+1][\dot{U}_{\kappa+1}]$, y así obtenemos que en $N[j(P_1)^{\cdot}][j(R)^{\cdot}|\kappa+1][j(R)^{\cdot}/j(R)^{\cdot}|\kappa+1]$, T es un árbol de áltura κ_0, con $cf(\kappa_0) = \aleph_1$, que no tiene ramas cofinales.

Por lo tanto T no tiene ramas cofinales en $N[j(R)^{\cdot}][j(P_1)^{\cdot}]$

Finalmente, como $j(A^*)$ es $\aleph_2$-cerrado en $N[j(R)^{\cdot}][j(P_1)^{\cdot}]$ por el lema 3.8, entonces T no tiene ramas cofinales en $V[j(R)^{\cdot}][j(P_1)^{\cdot}][j(A^*)^{\cdot}]$, ya que es un árbol de altura de cardinalidad $\aleph_1$.

Tenemos que $crit(j) = \kappa_0$, para $j : V[\dot{R}][\dot{P}_1][\dot{A}^*] \longrightarrow N[j(R)^{\cdot}][j(P_1)^{\cdot}][j(A^*)^{\cdot}]$, luego como supusimos que el universo de T era κ_0, $j(T) \restriction \kappa_0 = T$, pero mostramos a partir de nuestra suposición que T no tiene ramas en $N[j(R)^{\cdot}][j(P_1)^{\cdot}][j(A^*)^{\cdot}]$, lo cual contradice el hecho de que $j(T)$ es un $j(\kappa_0)$-árbol, ya que $j(\kappa_0) > \kappa_0$.

Lema 4.21. *$P(\aleph_1, j(\lambda_0))^V$ es κ_0-Knaster en $V[\dot{R}][\dot{P}_1][\dot{A}^*]$.*

Demostración. Por el lema 2.1 basta demostrar que todo conjunto de ordinales de $V[\dot{R}][\dot{P}_1][\dot{A}^*]$ de tamanño $< \kappa_0$, se puede cubrir con un conjunto de V de tamaño $< \kappa_0$. Sea X un conjunto de este tipo. Como $\kappa_0 \leq \aleph_2$ en $V[\dot{R}][\dot{P}_1][\dot{A}^*]$, se sigue que $X \in V[\dot{R}][\dot{P}_1]$. Pero por la demostración del lema 4.18, sabemos que existe $Y \supseteq X$ en V de tamaño $< \kappa_0$ $\square$

Bibliografía

[1] Uri Abraham, *Aronszajn trees on ω_2 and ω_3*. **Ann. Pure Appl. Logic**, vol.24 (1983), no. 3, pp. 213-230.

[2] Arthur W. Apter. *A remark on the tree property in a choiceless context*, **Arch. Math. Logic** vol. 50, (2011), 585-590.

[3] James Cummings and Matthew Foreman, *The tree property*, **Adv. Math.**, vol. 133 (1998), no. 1, pp. 1-32.

[4] Menachem Magidor and Saharon Shelah,*The tree property at successors of singular cardinals*, **Arch. Math. Logic**, vol. 35 (1996), no. 5-6, pp. 385-404.

[5] William Mitchell, *Aronszajn trees and the independence of the transfer property*, **Ann. Math. Logic**, vol. 5 (1972/73), pp. 21-46.

[6] Itay Neeman, *Aronszajn trees and failure of the singular cardinal hypothesis*, **J. Math. Log.**, vol. 9 (2009), no. 1, pp. 139-157

[7] Itay Neeman, *The tree property up to $\aleph_{\omega+1}$*, **Preprint**(2012)

[8] Dima Sinapova, *The tree property at $\aleph_{\omega+1}$*, **J. Symbolic Logic**, vol. 77 (2012), no. 1, pp. 279-290.

[9] E.Specker, *Sur un probléme de Sikorski*, **Colloquium Math.**, vol. 2 (1949), pp. 9-12.

[10] Thomas Jech, **Set Theory**, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, 2003.