Versiones Definibles en Teoría Combinatoria de Conjuntos

Diana Carolina Montoya Amaya
Dirigido por:
Andrés Villaveces Niño

June 2, 2008

Abstract

Se presentan algunas versiones definibles de propiedades combinatorias infinitas, tales como la propiedad del árbol y el teorema de Ramsey, entre otras. Además se prueba la equiconsistencia de "Todo ω_1- árbol que sea definible en primer orden sobre $(H_{\omega_1}, \varepsilon)$ tiene una rama cofinal "con la existencia de un cardinal Π_1^1 reflejante.

1 Introduccion

Es posible probar que el cardinal $\aleph_1$ no tiene la propiedad del árbol, es decir, es posible construir un ω_1- árbol que no tiene ramas de cardinalidad $> \omega$ (Árbol de Aronszajn); basados en el artículo de Amir Leshem "On the Consitency of the Definable Tree Property", estudiamos la propiedad definible del árbol y vemos que para $\aleph_1$ es consistente con la existencia de un cardinal Π_1^1 reflejante, el cual resulta ser una versión definible de un cardinal débilmente compacto.

Para esto presentamos primero las definiciones necesarias acerca de árboles, cardinales y extensiones de forcing que serán necesarias para las pruebas posteriores. A continuación definimos cardinales Π_1^1- reflejantes y damos una caracterización en términos de una versión definible de la propiedad de Keisler para cardinales débilmente compactos. También acotamos la consistencia de la existencia de un cardinal Π_1^1- reflejante respecto a la de un cardinal de Mahlo.

Luego mostramos que si colapsamos un cardinal Π_1^1- reflejante a $\aleph_1$, en la extensión genérica vale la propiedad definible del árbol para $\aleph_1$; como corolario vemos las consecuencias si además vale el axioma de constructibilidad $V = L$. También se muestra la propiedad definible de Ramsey para $\aleph_1$. Y que si en L(Universo constructible) vale la propiedad definible del árbol para $\aleph_1$, se tiene que en L, $\aleph_1$ es un cardinal Π_1^1- reflejante.

Por último inspirados en el trabajo de J.Nido, P.Mendoza y L.Villegas en [5]; utilizamos la propiedad de extensión definible que tienen los cardinales Π_1^1 reflejantes para probar una afirmación acerca de módulos libres de torsión y κ libres de torsión.

2 Preliminares

2.1 Árboles

Definicion 1.

- *Un árbol es un conjunto parcialmente ordenado $(T, <_T)$ tal que para cada $x \in T$, el conjunto $\{y \in T \mid y <_T x\}$ de todos los predecesores de x es bien- ordenado por $<_T$ y existe una raíz $r \in T$ tal que para cada $x \in T$, tal que $x \neq r$, $r <_T x$.*

- *El α- ésimo nivel de T, T_α consiste de todos los $x \in T$ tal que $\{y \in T \mid y <_T x\}$ tiene tipo de orden α.*

- *Una rama es un conjunto maximal linealmente ordenado por $<_T$. Una rama cofinal es una rama que intersecta todo nivel T.*

- *Un árbol $(T, <_T)$ es un κ- árbol si $|T| = \kappa$, para cada α, $|T_\alpha| < \kappa$ y $sup\{\alpha \mid T_\alpha\} = \emptyset$.*

Ejemplo 1.

- *Sea ρ un ordinal y A un conjunto no vacío. Definamos $A^{<\rho} = \bigcup_{\delta<\rho} A^\delta$ el conjunto de todas las sucesiones de elementos de A de tamaño menor que ρ y consideremos el árbol $(T, \leq)$ donde $T = A^{<\rho}$ y $f \leq g$ si y solo si $f \subseteq g$; el α- ésimo nivel de T, T_α es el conjunto A^α. Las ramas en T son funciones inyectivas de λ en A, además resultan ser ramas cofinales.*

  En particular si tomamos $\lambda = \omega = A$, tenemos el árbol $(T = \omega^{<\omega}, \leq)$ que consta de todas las sucesiones finitas en ω, si consideramos solo las sucesiones crecientes en T y llamamos a este nuevo árbol T', tenemos que la altura de T' es ω, pero T' no tiene ramas cofinales.

- *Lema de König: Si T es un árbol de altura ω y todos los niveles de T son a lo más finitos, entonces T tiene una rama de longitud ω*
- *Árboles de Suslin: Decimos que un árbol T es de Suslin si la altura de T es ω_1, toda rama es alo más contable y toda anticadena en T es a lo más contable; donde una anticadena es un subconjunto de T tal que todos sus elementos son dos a dos incomparables.*

Ahora introducimos varias definiciones de κ- arboles definibles.

Definicion 2.

- *Un κ- árbol es definible en el sentido estricto si su dominio es κ, y $<_T$ es $\Sigma_\omega((H_\kappa, \epsilon))$*
- *Un κ- árbol es definible en el sentido amplio si su dominio es T, y T,$<_T$ son ambos $\Sigma_\omega((H_\kappa, \epsilon))$ y T tiene cardinalidad definible κ, es decir existe una biyección $f : \kappa \to T$ la cual es $\Sigma_\omega((H_\kappa, \epsilon))$.*
- *Un κ- árbol es definible en el sentido muy amplio si su conjunto fundamental es T, y $<_T$ son $\Sigma_\omega((H_\kappa, \epsilon))$*

Claramente definible en el sentido estricto implica definible en el sentido amplio, y, este a su vez implica definible en el sentido muy amplio. A continuación vemos que ser definible en el sentido estricto y en el sentido amplio son equivalentes.

Proposicion 1. *Si $(T, <_T)$ es un κ- árbol definible en el sentido amplio, entonces existe un árbol $(\kappa, <_{T'})$ isomorfo a $(T, <_T)$ que es definible en el sentido estricto.*

Prueba:
Sea $(T, <_T)$ es un κ- árbol definible en el sentido amplio; sea $f : \kappa \to T$ la biyección definible y $\psi(x, y, z)$ la fórmula que define $<_T$ con parámetro z, es decir $\alpha <_T \beta \iff \models \psi(\alpha, \beta, z)$.
Definamos $<_{T'}$ como sigue: $\alpha <_{T'} \iff \psi(f(\alpha), f(\beta), z)$, claramente $(\kappa, <_{T'}$) es definible en el sentido estricto.

Definicion 3. *Un árbol de Aronszajn es un árbol de altura ω_1, tal que todos sus niveles son de cardinalidad a lo más contable y no tiene ramas de cardinalidad no contable.*

Teorema 1 (Aronszajn). *Existe un árbol de Aronszajn.*

Prueba: Ver Jech[2] pag116

Hecho: Si T es un árbol de Aronszajn tal que existe una función $f : T \to \mathbb{Q}$ tal que $f(x) < f(y)$ cuando $x < y$, decimos que T es un árbol de Aronszajn especial.

Definicion 4. *Decimos que un cardinal regular no contable κ tiene la propiedad del árbol si todo árbol de altura κ cuyos niveles tienen cardinalidad $< \kappa$ tiene una rama de cardinalidad κ.*

Nota: Es claro que $\aleph_0$ tiene la propiedad del árbol (Lema de König) mientras que $\aleph_1$ no (Existencia del árbol de Aronszajn).

2.2 Cardinales

Definicion 5. *Un cardinal κ es un cardinal límite fuerte si $2^\lambda < \kappa$ para cada $\lambda < \kappa$.*

Definicion 6. *Un cardinal κ es inaccesible si es no contable, regular y límite fuerte.*

Definicion 7. *Sean κ y λ cardinales infinitos , sea n un número natural y sea m un cardinal (finito o infinito), escribimos:*

$$\kappa \to (\lambda)^n_m$$

para denotar la siguiente propiedad de partición: Toda partición de $[\kappa]^n$ en m piezas tiene un conjunto homogeneo de tamaño λ, en otras palabras, toda $F : [\kappa]^n \to m$ es constante sobre $[H]^n$ para algún $H \subset \kappa$ tal que $|H| = \lambda$.

Usualmente omitimos m cuando $m = 2$

Definicion 8. *Un cardinal κ es débilmente compacto si es no contable y satisface la propiedad de partición $\kappa \to (\kappa)^2$*

A continuación una caracterización de cardinales débilmente compactos en términos de la propiedad del árbol y una en términos de la propiedad de extensión.

Lema 1. *(i) Si κ es débilmente compacto, entonces κ tiene la propiedad del árbol.*

(ii) Si κ es inaccesible y tiene la propiedad del árbol, entonces κ es débilmente compacto.

Prueba: Ver Jech[2] pag120

Teorema 2 (Keisler). *κ es débilmente compacto si y solamente si tiene la propiedad de extensión: Para cada $R \subseteq V_\kappa$ existe un conjunto transitivo $X \neq V_\kappa$ y $S \subseteq X$ tal que $(V_\kappa, \varepsilon, R) \prec (X, \varepsilon, S)$*

Prueba: Ver Kanamori[3] pag39

Definicion 9. *Un cardinal inaccesible κ es llamado un cardinal de Mahlo si el conjunto de todos los cardinales regulares bajo κ es estacionario.*

2.3 El Modelo (H_κ, ε)

En esta sección definimos un modelo que satisface los axiomas de ZF a excepción del axioma de partes, que será fundamental en los desarrollos posteriores.

Definicion 10. *$H(\kappa) = H_\kappa = \{x \in V \mid |trcl(x)| < \kappa\}$ donde $trcl(x) = \bigcap\{z \mid x \subset z$ y z es transitivo $\}$*

Nota: En la definición anterior si $\kappa = \omega$ decimos que H_ω es el conjunto de los hereditariamente finitos y si $\kappa = \omega_1$, H_{ω_1} es el conjunto de los hereditariamente contables.

A continuación mencionamos algunas de sus propiedades más importantes:

Proposicion 2. *Dado un cardinal infinito κ:*

1. *H_κ es transitivo*
2. *$H_\kappa \subset V_\kappa$*
3. *(AC) para $\kappa > \omega$, $H_\kappa = V_\kappa \iff \kappa = \beth_\kappa$*

Prueba: Ver Kunen[4]

2.4 Indescriptibilidad

Sea $n > 0$ un número natural y consideremos el cálculo de predicados de n-ésimo orden. Hay variables de ordenes $1, 2, \ldots, n$, y los cuantificadores son aplicados a variables de todos los órdenes. Una fórmula de n- ésimo orden contiene, además simbolos de primer orden y cuantificadores de ordenes altos, predicados $X(z)$ donde X y z son variables de orden $k+1$ y k respectivamente (para cada $k < n$). Validez para una fórmula de n- ésimo orden en un modelo $\mathsf{A} = (A, P, \ldots, f, \ldots, c, \ldots)$ se define como sigue: Variables de primer orden son interpretadas como elementos del conjunto A, variables de segundo orden como elementos de $\wp(A)$ etc.; variables de orden n son interpretadas como elementos de $\wp^{n-1}(A)$. El predicado $X(z)$ es interpretado como $z \in X$.

Una Π^n_m fórmula es una fórmula de orden $n+1$ de la forma:

$$\underbrace{\forall X \exists Y \ldots}_{m\, cuantificadores} \quad \psi$$

donde $X, Y, \ldots$ son variables de orden $n+1$ y ψ es tal que todas las variables cuantificadas son de orden a lo más n, similarmente se definen las fórmulas $\sum^n_m$, la única diferencia es que los cuantificadores están intercalados.

Definicion 11. *Un cardinal κ es $\prod^n_m$ indescriptible si cuando $U \subset V_\kappa$ y σ es una sentencia Π^n_m tal que si $(V_\kappa, \varepsilon, U) \models \sigma$, entonces para algún $\alpha < \kappa$, $(V_\alpha, \varepsilon, U \cap V_\alpha) \models \sigma$*

A continuación presentamos un resultado que muestra que los cardinales débilmente compactos son exactamente los Π^1_1 indescriptibles.

Teorema 3 (Hanf - Scott). *Un cardinal κ es Π^1_1- indescriptible si y solo si es débilmente compacto.*

Prueba: Ver Jech[2]pag 297

2.5 Forcing

Enunciamos los conceptos básicos de forcing y casos particulares que serán utilizados en los teoremas principales.

Sea M un modelo transitivo de ZFC, en M consideramos un conjunto no vacío parcialmente ordenado $(P, <)$ al que llamaremos una noción de forcing, y a sus elementos condiciones de forcing. Decimos que p es más fuerte que q si $p < q$; dos consiciones p, q son compatibles si existe $r \in P$ tal que $r \leq q$ y $r \leq p$, en otro caso diremos que son incompatibles.Un subconjunto $A \subset P$ es una anticadena si todos sus elementos son dos a dos incompatibles. Un subconjunto $D \subset P$ es denso en P si para cada $p \in P$ existe $q \in D$ tal que $q \leq p$.

Definicion 12. *Un subconjunto $F \subset P$ es un filtro sobre P si:*

(i) F es no vacío

(ii) Si $p \leq q$ y $p \in F$ entonces $q \in F$

(iii) Si $p, q \in F$, existe $r \in F$ tal que $r \leq p$ y $r \leq q$

Definicion 13. *Un conjunto de condiciones $G \subset P$ genérico sobre M si:*

(i) G es un filtro sobre P

(ii) Si D es denso en P y $D \in M$ entonces $G \cap D \neq \emptyset$

Enunciamos los teoremas más importantes sobre forcing:

Teorema 4 (Teorema del Modelo Genérico). *Sea M un modelo transitivo de ZFC y sea $(P, <)$ una noción de forcing en M. Si $G \subset P$ es genérico sobre P, existe un modelo transitivo $M[G]$ tal que:*

(i) $M[G]$ es un modelo de ZFC

(ii) $M \subset M[G]$ y $G \in M[G]$

(iii) $Ord^{M[G]} = Ord^M$

(iv) Si N es un modelo transitivo de ZFC tal que $M \subset N$ y $G \in N$, entonces $M[G] \subset N$

Teorema 5 (Teorema de Forcing). *Sea $(P, <)$ una noción de forcing en el modelo M. Si σ es una sentencia del lenguaje de forcing, entonces para cada $G \subset P$ genérico sobre M,*

$$M[G] \models \sigma \text{ si y solo si } (\exists p \in G) p \Vdash \sigma$$

Ahora nos concentramos en un ejemplo de forcing y estudiamos algunas de sus propiedades:

2.5.1 El Colapso de Levy

Una de las técnicas básicas más importantes de forcing es precisamente la de colapsar cardinales, la idea es que si tenemos dos cardinales regulares κ y λ el colapso hace que en la extensión genérica tengamos $\kappa = \lambda^+$.

Sea $S \subseteq On$ y λ un cardinal regular

$Coll(\lambda, S) = \{p \mid p \text{ es una función} \wedge |p| < \lambda \wedge dom(p) \subseteq S \times \lambda \wedge \forall(\alpha, \xi) \in dom(p)(\alpha > 0 \rightarrow p(\alpha, \xi) \in \alpha)\}$

ordenado por: $p \leq q$ si y solo si $p \supseteq q$. Ahora listamos algunas de sus propiedades:

Lema 2. *(i) $Coll(\lambda, S)$ es λ-cerrado, es decir cuando $\gamma < \lambda$ y $\{p_\alpha \mid \alpha < \gamma\} \subseteq Coll(\lambda, S)$ con $p_\beta \leq p_\alpha$ para $\alpha < \beta < \gamma$, existe $p \in Coll(\lambda, S)$ tal que $p \leq p_\alpha$ para cada $\alpha < \gamma$.*

(ii) Si κ es regular, $\kappa > \lambda$ y κ es inaccesible o $\lambda = \omega$ entonces $Coll(\lambda, \kappa)$ tiene la κ-condición de cadena.

(iii) Si $Coll(\lambda, \kappa)$ tiene la κ-condición de cadena, entonces forcing con $Coll(\lambda, \kappa)$ preserva cardinales menores o iguales que λ y mayores o iguales que κ.

3 Cardinales Π^1_1 reflejantes

Definicion 14. *Sea κ un cardinal. Decimos que κ es Π^m_n reflejante, si κ es inaccesible y para cada $A \subseteq V_\kappa$ definible sobre V_κ (con parámetros) y para cada Π^m_n sentencia Φ, tal que:*

$$(V_\kappa, \varepsilon, A) \models \Phi$$

existe $\alpha < \kappa$ tal que

$$(V_\alpha, \varepsilon, A \cap V_\alpha) \models \Phi$$

Claramente los cardinales Π^m_n reflejantes son la versión definible de los cardinales Π^m_n indescriptibles. A continuación probamos el siguiente lema:

Lema 3. *Sea κ un cardinal de Mahlo, entonces para cada n y m*

$$S = \{\alpha < \kappa | \, \alpha \, es \, \Pi^m_n \, reflejante\}$$

es estacionario.

Prueba: Sea C un club, queremos ver $C \cap S \neq \emptyset$, es decir encontrar $\mu \in C$ tal que μ es Π^m_n reflejante.

Consideremos el conjunto S de las triplas (Φ, ψ, a) donde
Φ es Π^m_n
$\psi(x, a)$ es una fórmula de primer orden en la variable x
$a \in V_\kappa$

Claramente S es un conjunto de cardinalidad κ, así podemos considerar una enumeración de $e : \{(\Phi, \psi, a)\} \to \kappa$.

Como $a \in V_\kappa$, si consideramos $\gamma = ran(\alpha)$ sabemos que $a \in V_{\gamma+1}$ y γ es mínimo, entonces podemos suponer sin pérdida de generalidad que $a \in V_{e(\Phi,\psi,a)}$ y $e(\Phi, \psi, a) < (ran(a))^\flat$ donde $\alpha^\flat$ es el menor inaccesible mayor que α y que e es una biyección.

Ahora para cada tripla (Φ, ψ, a) definamos:

$$g(e(\Phi, \psi, a)) = \begin{cases} \text{el mínimo } \rho \text{ tal que } e(\Phi, \psi, a) < \rho \text{ y} & \\ (V_\rho, \varepsilon, S) \models (x \in S \text{ sii } \psi(x, a)) \wedge \Phi & \text{si existe} \\ e(\Phi, \psi, a) + 1 & \text{si no} \end{cases}$$

Tenemos que $g(\alpha) > \alpha$ para cada $\alpha < \kappa$ ya que existe una tripla (Φ, ψ, a) tal que $\alpha = e((\Phi, \psi, a))$; ahora, si existe ρ tal que $e(\Phi, \psi, a) < \rho$ y $(V_\rho, \varepsilon, S) \models (x \in S \text{ sii } \psi(x, a)) \wedge \Phi$ se tiene que $g(\alpha) = \rho > e((\Phi, \psi, a)) = \alpha$, y en caso de que ρ no exista, $g(\alpha) = g(e(\Phi, \psi, a)) = e(\Phi, \psi, a) + 1 = \alpha + 1 > \alpha$. Y como κ es de Mahlo el conjunto de inaccesibles bajo κ es estacionario, entonces existe $\mu \in C$ tal que μ es inaccesible y $\mu < \kappa$.

Además se tiene que $g''\mu \subseteq \mu$; para esto veamos que $D = \{\, \mu < \kappa \,|\, g''\mu \subseteq \mu\}$ es un club.

(i) D es no acotado:
Sea $\alpha < \kappa$ y definamos la sucesión $\langle \beta_n : n < \omega \rangle$ de la siguiente manera:
$\beta_0 = sup(g''\alpha)$
$\beta_{n+1} = \sup_{\gamma < \beta_n} g''(\gamma)$
Sea $\beta = sup_{n<\omega}\beta_n$; claramente $\beta < \kappa$ pues κ es inaccesible, veamos que $\beta \in D$, es decir $g''\beta \subseteq \beta$
Sea $\alpha \in g''\beta$ entonces existe $\lambda < \beta$ tal que $g(\lambda) = \alpha > \lambda$. Como $\lambda < \beta$ existe $n < \omega$ tal que $\lambda < \beta_n < \beta$, entonces $\lambda < \sup_{\gamma < \beta_{n-1}} g''(\gamma) \leq \beta$,de donde $\lambda < g''(\lambda) < \beta$ asi $\alpha < \beta$.

(ii) D es cerrado:
Sea $\lambda < \kappa$ un punto límite de D, es decir $sup(D \cap \lambda) = \lambda$ hay que ver que $\lambda \in D$, es decir $g''\lambda \subseteq \lambda$.
Sea $\zeta \in g''\lambda$ entonces existe $\xi < \lambda$ tal que $g''\xi = \zeta$; como $sup(D \cap \lambda) = \lambda$, existe $\xi < \mu < \lambda$ tal que $g''\mu \subseteq \mu$ entonces $g(\xi) \in \mu$ y $\zeta < \mu < \lambda$ de donde $\zeta \in \lambda$.

Afirmamos que μ es Π^m_n reflejante; ya se tiene que μ es inaccesible. Tomemos $S \subseteq V_\mu$ definido por "$x \in S$ si y solo si $V_\kappa \models \Phi(S)$ ".

Como $\mu \in C$ existe $\rho \in C$ tal que $(V_\rho, \varepsilon, S \cap \rho) \models \Phi$ y $S \cap \rho$ está definido por $\psi(x, a)$, (si tomamos $\rho = \mu$ se tiene).

Entonces $g(e(\Phi, \psi, a))$ está definido en el primer caso; además como $g''\mu \subseteq \mu$ y $e(\Phi, \psi, a) < \mu$, se tiene que $g(e(\Phi, \psi, a)) < \mu$

entonces $(V_{g(e(\Phi,\psi,a))}, \varepsilon, S \cap g(e(\Phi, \psi, a))) \models \Phi$, μ es Π^m_n reflejante.

$\square$

Definicion 15. *κ tiene la propiedad de extensión definible si para cada n y para cada $A \subseteq V_\kappa$ definible en primer orden sobre V_κ con parámetros de V_κ, existen un conjunto transitivo X y $A^X \subseteq X$ tal que $\kappa \in X$ y $(V_\kappa, \varepsilon, A) \preceq_n (X, \varepsilon, A^X)$*

Proposicion 3. *κ tiene la propiedad de extensión definible si y solo si para cada n existe una Σ_n- extensión elemental final de V_κ, que tiene a κ, esto es $\kappa \in X$ y $(V_\kappa, \varepsilon) \preceq_n (X, \varepsilon)$*

Prueba: (i) **Suficiencia**. Supongamos primero que κ tiene la propiedad de extensión, y sea $n \in \mathbb{N}$. Sea $A = \emptyset$, entonces para ese n y ese A existen un conjunto transitivo X y $A^X \subseteq X$ tal que $\kappa \in X$ y $(V_\kappa, \varepsilon, A) \preceq_n (X, \varepsilon, A^X)$ de donde $(V_\kappa, \varepsilon) \preceq_n (X, \varepsilon)$

(ii) **Necesidad**: Sea $n \in \mathbb{N}$ y $A \subseteq V_\kappa$ definible por $\psi(x, \bar{a})$ donde $\bar{a} \in V_\kappa$, por hipótesis para ese n, existe una extensión Σ_n- elemental final transitiva de V_κ tal que $\kappa \in X$ y $(V_\kappa, \varepsilon) \preceq_n (X, \varepsilon)$; sea $A^X = \{x \in X | (V_\kappa, \varepsilon) \models \psi(x, \bar{a})\}$, claramente $(V_\kappa, \varepsilon, A) \preceq_n (X, \varepsilon, A^X)$.

$\square$

Teorema 6. *Un cardinal κ es Π^1_1 reflejante si y solo si κ es inaccesible y tiene la propiedad de extensión definible.*

Prueba: (i) **Suficiencia**. Supongamos que κ es inaccesible y tiene la propiedad de extensión y veamos que es Π^1_1 reflejante, para esto sea $A \subseteq V_\kappa$ definible sobre V_κ. Sea Φ una formula Π^1_1, entonces Φ es de la forma $\forall Y \phi(Y)$, donde $\phi(Y)$ es una formula de primer orden en los predicados Y y A, ahora supongamos que $(V_\kappa, \varepsilon, A) \models \Phi$. Sea n suficientemente grande de tal manera que la sentencia $\exists \alpha (\forall Y \in V_{\alpha+1}((V_\alpha, \varepsilon, A \cap V_\alpha) \models \phi(Y)))$ sea Σ_n en $L_\varepsilon(A)$, el lenguaje ambiente de $(V_\kappa, \varepsilon, A)$; ahora sea (X, ε, A) el modelo dado por la propiedad de extensión, esto es:

$$(V_\kappa, \varepsilon, A) \prec_n (X, \varepsilon, A)$$

donde X es un conjunto transitivo y $\kappa \in X$. Por consiguiente $A^X \cap V_\kappa = A$. Además se tiene que $V_\kappa^X = V_\kappa$ pues $\forall \alpha < \kappa\ V_\alpha^X = V_\alpha$ y $V_\kappa = \bigcup_{n<\omega} V_\alpha = \bigcup_{n<\omega} V_\alpha^X = V_\kappa^X$; y que $V_{\kappa+1}^X \subseteq V_{\kappa+1}$ porque si $x \in V_{\kappa+1}^X$,existe $y \in V_\kappa^X$ tal que $x \subseteq y$ por lo anterior $y \in V_\kappa$ y $x \subseteq y$ entonces $x \in V_{\kappa+1}$.

Ahora como $(V_\kappa, \varepsilon, A) \models \Phi$ se sigue que:

$$\forall X \subseteq V_\kappa (V_\kappa, \varepsilon, A) \models \phi(X)$$

entonces,

$$(X, \varepsilon, A^X) \models \forall Y \in V_{\kappa+1}((V_\kappa^X, \varepsilon, A^X \cap V_\kappa^X) \models \phi(Y))$$

de donde,

$$(X, \varepsilon, A^X) \models \exists \alpha (\forall Y \in V_{\alpha+1}((V_\alpha, \varepsilon, A^X \cap V_\alpha) \models \phi(Y)))$$

Ahora, como $(V_\kappa, \varepsilon, A) \prec_n (X, \varepsilon, A)$,

$$(V_\kappa, \varepsilon, A) \models \exists \alpha ((V_\alpha, \varepsilon, A \cap V_\alpha) \models \Phi)$$

así; $(V_\alpha, \varepsilon, A \cap V_\alpha) \models \Phi$, entonces κ es Π_1^1- reflejante.

(ii) **Necesidad**. Sea κ un cardinal Π_1^1- reflejante y fijemos $n < \omega$. Sea σ la fórmula Π_1^1- expresando que κ tiene la propiedad de extensión relativa al n que se había fijado, es decir que no existe una Σ_n- extensión elemental transitiva X de V_κ que tenga a κ, así:

$\sigma : \forall A \in V_{\kappa+1} \exists X\ \exists A^X \subseteq X\ \psi(A, X)$ donde $\psi(A, X) : \exists \phi(\bar{a}, x)$ tal que $(X, \varepsilon, A^X) \models \phi(\bar{a}, x)$ y $(V_\kappa, \varepsilon, A) \not\models \phi(\bar{a}, x)$

Sea τ la fórmula que expresa la inaccesibilidad de κ

Sea $C = \{\alpha < \kappa \mid (V_\alpha, \varepsilon) \prec_n (V_\kappa, \varepsilon)\}$

Afirmación: C es un club en κ.Para ver que C es cerrado tomemos α un punto límite de C es decir $sup(C \cap \alpha) = \alpha$, hay que ver que $\alpha \in C$, esto es:

$$(V_\alpha, \varepsilon) \prec_n (V_\kappa, \varepsilon)$$

Sea ψ una fórmula Σ_n, e.d., $\psi = \exists x \varphi$ y supongamos que $(V_\kappa, \varepsilon) \models \psi$ sea $\gamma < \alpha$, entonces existe $\gamma < \lambda < \alpha$ tal que $(V_\lambda, \varepsilon) \prec_n (V_\kappa, \varepsilon)$, entonces se tiene que $(V_\lambda, \varepsilon) \models \psi(x, \bar{a})$ de donde $(V_\alpha, \varepsilon) \models \psi(x, \bar{a})$

Ahora para ver que C es no acotado, consideremos $\alpha < \kappa$ y construyamos funciones de Skolem h para V_κ; sea $h(a_1, ..., a_n) = \hat{x}$ donde $\hat{x} = \{a \in x \mid \forall z ran(a) \leq ran(z)\}$ y $x = \{a \mid \varphi(a, a_1, ..., a_n)\}$
Claramente h es una función de Skolem;si
$\exists a \in V_\kappa \ (V_\kappa, \varepsilon) \models \varphi(a, a_1, ..., a_n)$
$(V_\kappa, \varepsilon) \models \exists x \varphi(x, a_1, ..., a_n)$
$(V_\kappa, \varepsilon) \models \varphi(h(a_1, ..., a_n), a_1, ..., a_n)$

Ahora, definamos la sucesión (α_n) como sigue:
$\alpha_0 = \alpha$
$\alpha_{n+1} < \kappa$ tal que $h(V_{\alpha_n}) \subset V_{\alpha_{n+1}}$ para cada h

Sea $\beta = \lim_{n\to\infty} \alpha_n$, se tiene que $(V_\beta, \varepsilon) \prec (V_\kappa, \varepsilon)$
Ahora, sea ρ la fórmula que dice que C es un club, entonces se tiene que:

$$(V_\kappa, \varepsilon, C) \models \sigma \wedge \tau \wedge \rho$$

Como κ es Π^1_1- reflejante, existe $\alpha < \kappa$ tal que $(V_\alpha, \varepsilon, C \cap \alpha) \models \sigma \wedge \tau \wedge \rho$, entonces α es inaccesible y es punto límite de C, de donde $\alpha \in C$ e.d. $(V_\alpha, \varepsilon) \prec_n (V_\kappa, \varepsilon)$.

Sea $X_0 = V_\alpha \cup \{V_\alpha\}$ y construyamos un submodelo elemental $(X', E) \prec (V_\kappa, \varepsilon)$ que tenga a X_0 y sea de cardinalidad κ.

Consideremos (X', E) la cobertura de Skolem de X_0 en (V_κ, ε), es decir la clausura de X_0 por funciones de skolem, y sea (X, ε) el colapso transitivo de (X', E), se sigue que $(V_\alpha, \varepsilon) \prec_n (X, \varepsilon)$ y $V_\alpha \in X$ entonces:

$$(V_\alpha, \varepsilon) \models \neg\sigma$$

lo cual es una contradicción.

$\square$

Lema 4. *Sea κ un cardinal Π^1_1- reflejante. Sea T un $\kappa-$árbol definible en el sentido muy amplio, entonces T tiene una rama cofinal.*

Prueba: Como κ es inaccesible $V_\kappa = H_\kappa$; sea T un $\kappa-$árbol definible en el sentido muy amplio, además sea n suficientemente grande tal que la afirmación "$\forall\alpha\, T$ tiene una rama de longitud α" sea Σ_n sobre $(V_\kappa, \varepsilon, T)$; por el teorema anterior existe una estructura transitiva (X, ε, T^X) tal que:

$$(V_\kappa, \varepsilon, T) \prec_n (X, \varepsilon, T^X)$$

Como $V_\kappa^X = V_\kappa \in X$ se sigue que $T^X \cap V_\kappa^X = T$; ahora como T es un $\kappa-$árbol tenemos que:

$$(V_\kappa, \varepsilon, T) \models \forall\alpha T \text{ tiene una rama de longitud } \alpha$$

.

Por lo tanto,

$$(X, \varepsilon, T^X) \models \forall\alpha T^X \text{ tiene una rama de longitud } \alpha$$

.

Como $\kappa \in X$ vemos que $(X, \varepsilon, T^X) \models T^X$ tiene una rama b de longitud κ. Como $T^X \cap V_\kappa^X = T$, resulta que b es realmente una rama cofinal de T.

$\square$

4 La construcción de forcing

Describimos la construcción de forcing, y probamos que en la extensión genérica se satisface la propiedad del árbol para ω_1- árboles definibles en primer orden sobre $(H_{\omega_1}, \varepsilon)$.

Sea κ un cardinal Π^1_1 reflejante en V. Además sea

$$\mathbb{P} = Coll(\omega, < \kappa)$$

el Colapso de Levy de κ a ω_1, y para cada $\alpha < \kappa$ sea

$$\mathbb{P}_\alpha = Coll(\omega, < \alpha)$$

un segmento inicial de $\mathbb{P}$ y sea G un filtro $\mathbb{P}$- genérico.

Definicion 16. $\aleph_1 \xrightarrow{def} (\aleph_1)^m_\alpha$ *si y solo si para cada partición de* $[\aleph_1]^m$ *en* α *conjuntos que sea definible en primer orden sobre* $(H_{\omega_1}, \varepsilon)$ *(con parámetros de* H_{ω_1}*), tiene un conjunto homogéneo de tamaño* $\aleph_1$*.*

A continuación probamos la versión definible del teorema de Ramsey.

Lema 5. $V[G] \models \aleph_1 \xrightarrow{def} (\aleph_1)^2_2$

Prueba. Sea $F : [\aleph_1]^2 \to 2$ una partición definible en $V[G]$ definida por:

$$F(\{\alpha, \beta\}) = i \iff \Phi(x, \alpha, \beta, i)$$

donde Φ es una fórmula Σ_n relativizada a $(H_{\omega_1})^{V[G]}$ y el parámetro $x \in (H_{\omega_1})^{V[G]}$, entonces $|trcl(x)| < \omega_1$, es decir $trcl(x)$ es contable, en particular x es un conjunto contable el cual se puede ver como un real, es decir una función $x : \omega \to \omega$.
Ahora por la κ- condición de cadena del Colapso de Levy (e.d. toda anticadena en $\mathbb{P}$ es de cardinalidad menor que κ); para cada $x \in V[G]$ existe $\varepsilon < \kappa$ tal que $x \in V[G_\varepsilon]$ donde G_ε es un segmento inicial de G, que resulta ser genérico para $\mathbb{P}_\varepsilon$.

Para verlo, sea $x \in V[G]$ un real y sea $\dot{x}$ un nombre canónico para x tal que $\dot{x}^G = x$. Para cada $\alpha < \gamma$ sea $A_\alpha \subseteq Coll(\omega, \kappa)$ una anticadena maximal tal que para cada $p \in A_\alpha$ exista ζ tal que $p \Vdash \dot{x}(\alpha) = \zeta$; como $Coll(\omega, \kappa)$ tiene la κ condición de cadena $|P_\alpha| < \kappa$ para cada $\alpha < \gamma$, entonces

$$|\bigcup_{\alpha<\gamma} P_\alpha| < \kappa$$

.
Como κ es regular existe $\varepsilon < \kappa$ tal que si

$$p \in \bigcup_{\alpha<\gamma} P_\alpha \text{ entonces } \mathrm{dom}(p) \subseteq \varepsilon \times \omega$$

Sea $G_\varepsilon = G \cap \mathbb{P}_\varepsilon$; entonces x es definible en G_ε por $x(\alpha) = \zeta$ sii $p \Vdash \dot{x}(\alpha) = \zeta$

para el único $p \in G \cap P_\alpha$, de donde $x \in V[G_\varepsilon]$.

Más aún, por el siguiente resultado de Solovay $V[G] = V[G_\varepsilon][H]$ donde H es genérico para $\mathbb{P}$.

Proposicion 4. *Suponga que $\kappa > \omega$ es regular y G es $Coll(\omega, \kappa)$- genérico. Entonces para cada $x \in V[G]$ con $x : \omega \to On$, existe un H el cual es $Coll(\omega, \kappa)$- genérico sobre $V[x]$ tal que $V[G] = V[x][H]$.*

Además por la homogeneidad del Colapso de Levy todo conjunto de ordinales definible en $V[G]$ con parámetros en $V[G_\varepsilon]$ es definible en $V[G_\varepsilon]$ y para cada fórmula Ψ podemos calcular otra fórmula Φ tal que:

$$V[G] \models \Psi(x, \alpha, \beta, i) \iff V[G_\varepsilon] \models \Phi(x, \alpha, \beta, i)$$

para cada $\alpha, \beta < \kappa$ e $i \in \{0, 1\}$.

$\mathbb{P}$ es débilmente homogéneo si para cada $p, q \in \mathbb{P}$ existe un automorfismo e de $\mathbb{P}$ tal que $e(p) \| q$.

Sea $X \subseteq On$ tal que X es definible en $V[G]$ con parámetros de $V[G_\varepsilon]$, es decir existe $\sigma(x, \bar{a})$ tal que:

$$\alpha \in X \iff V[G] \models \sigma(\alpha, \bar{a})\ a \in V[G_\varepsilon]$$

entonces existe $p \in Coll(\omega, < \kappa)$ tal que $p \Vdash_{\mathbb{P}} \sigma(\dot{\alpha}, \dot{\bar{a}})$

Sea $q \in Coll(\omega, < \varepsilon)$ entonces por la homogeneidad existe $e \in Aut(\mathbb{P})$ tal que $e(p) \| q$, de donde existe $r \in Coll(\omega, < \varepsilon)$ tal que $r \leq q$ y $r \leq e(p)$, además $e(p) \Vdash_{\mathbb{P}_\varepsilon} \sigma(\dot{\alpha}, \dot{\overline{e(a)}})$ de donde $V[G_\varepsilon] \models \sigma(\alpha, \overline{e(a)})$
Sea ε fijo y sea $\tilde{\sigma}$ un $\mathbb{P}_\varepsilon$- nombre para x, ahora definimos un κ- árbol T el cual es definible en V_κ. Para cada $\alpha < \kappa$ definimos el nivel α como sigue:

$\tilde{h} \in T_\alpha \iff$
$\tilde{h}$ es un $\mathbb{P}_\varepsilon$- nombre para una función de α en $\{0, 1\}$ y

$$\exists \mu_0 \forall \mu \exists \delta > \mu \forall \beta < \alpha \forall p \in \mathbb{P}_\varepsilon$$
$$p \Vdash_{\mathbb{P}_\varepsilon} \Phi(\tilde{\sigma}, \beta, \mu_0, \tilde{h}(\beta)) \iff p \Vdash_{\mathbb{P}_\varepsilon} \Phi(\tilde{\sigma}, \beta, \delta, \tilde{h}(\beta))$$

y sea

$$T = \bigcup_{\alpha < \kappa} T_\alpha$$

diremos $\tilde{h}_\alpha$ para denotar que $\tilde{h} \in T_\alpha$, el orden de T es:

$$\tilde{h}_\alpha \leq \tilde{h}_\beta \iff \Vdash_{\mathbb{P}_\varepsilon} \tilde{h}_\alpha \subset \tilde{h}_\beta$$

Veamos que, efectivamente T es un κ- árbol, para probar esto primero observemos que para cada $\alpha < \kappa$ $T_\alpha \neq \emptyset$ dado que, para cada α existen alo más $2^{2^{\alpha+|\mathbb{P}_\varepsilon|}}$ $\mathbb{P}_\varepsilon$ nombres para tales funciones; por lo tanto estamos particionando κ en menos de κ subconjuntos de acuerdo a los posibles valores de $\langle F(\{\beta, \delta\}) : \beta < \alpha \rangle$.

Ahora, $|T_\alpha| \leq 2^\alpha < \kappa$ (κ es inaccesible), y T es definible en el sentido muy amplio sobre H_κ.Por el lema anterior T tiene una rama cofinal $\langle \tilde{h}_\alpha < \omega_1 \rangle$.

Trabajamos ahora en $V[G]$, sea $\tilde{h}_\alpha(G_\varepsilon)$ la realización del nombre $\tilde{h}_\alpha$ en $V[G_\varepsilon]$ y sea

$$h = \bigcup_{\alpha<\kappa} \tilde{h}_\alpha(G_\varepsilon)$$

entonces h es una función de $\kappa = \aleph_1^{V[G]}$ a $\{0, 1\}$. Definamos:

$$A_\alpha = \{\alpha < \gamma < \aleph_1 \mid \forall \beta < \alpha F(\{\beta, \gamma\}) = h(\beta)\}$$

Para cada α, $|A_\alpha| = \aleph_1$ por la definición de $\tilde{h}_\alpha$; además $\langle A_\alpha : \alpha < \aleph_1 \rangle$ es una sucesión decreciente de conjuntos; es decir si $\alpha_1 < \alpha_2 < \aleph_1$ entonces $A_{\alpha_2} \subseteq A_{\alpha_1}$, en efecto, sea $\gamma \in A_{\alpha_2}$ entonces, $\alpha_2 < \gamma < \aleph_1$ y para cada $\beta < \alpha_2$ $F(\{\beta, \gamma\}) = h(\beta)$, ahora como $\alpha_1 < \alpha_2$ se tiene que $\alpha_1 < \gamma < \aleph_1$ y si $\beta < \alpha_1$ claramente $F(\{\beta, \gamma\}) = h(\beta)$ de donde $\gamma \in A_{\alpha_1}$.

Construimos H_0 por inducción en $\alpha < \aleph_1$; sea

$\beta_0 = 0$
$\beta_\alpha = min A_{\gamma_\alpha}$ donde $\gamma_\alpha = sup\{\beta_i : i < \alpha\}$

Sea $H_0 = \{\beta_\alpha . \alpha < \aleph_1\}$

Por la definición de H_0 se tiene que para cada $\alpha < \beta \in H_0$ $F(\{\alpha, \beta\}) = h(\alpha)$

Sea l minimal tal que $|h^{-1}(l) \cap H_0| = \aleph_1$ y por último definamos $H = \{\alpha \in H_0 \mid h(\alpha) = l\}$, claramente este es el conjunto homogéneo que se buscaba.

$\square$

Lema 6. *Supongamos que $V = L$, sean h y $A \in V[G]$ tal que $|A| = \aleph_1$ y $h : [A]^2 \to 2$ es una partición de $[A]^2$ en dos conjuntos, donde A y h son definibles en primer orden (con parámetros) sobre $(H_{\omega_1}, \varepsilon)^{V[G]}$. Entonces existe $B \subseteq A$ homogéneo para h y $|B| = \aleph_1$.*

Teorema 7. *$V[G] \models$ "todo ω_1- árbol definible T tiene una rama cofinal ". Mas aún si $V = L$ $V[G] \models$ "todo ω_1- árbol T definible en el sentido muy amplio sobre $(H_{\omega_1}, \varepsilon)$ tiene una rama cofinal ".*

Prueba:

Sea $(\aleph_1, <_T)$ un árbol definible sobre $\aleph_1$, es decir, existe una fórmula $\Psi(\alpha, \beta, z)$ tal que:

$$\alpha <_T \beta \iff (H_{\omega_1}, \varepsilon) \models \Psi(\alpha, \beta, z)$$

Extendemos el orden parcial $<_T$ a un orden total $\prec$ como sigue:$\alpha \prec \beta$ si y solo sí:

(i) $\alpha <_T \beta$, ó

(ii) α, β son incomparables y si ζ es el primer nivel donde los predecesores de α, β, $\alpha_\zeta, \beta_\zeta$ son distintos, entonces $\alpha_\zeta < \beta_\zeta$

$\prec$ es definible en primer orden sobre $(H_{\omega_1}, \varepsilon)$ usando la definición de $<_T$.

Ahora definamos una partición de $[\aleph_1]^2$ por:

$$F(\{\alpha, \beta\}) = 1 \iff \alpha < \beta \text{ coincide con } \alpha \prec \beta$$

Como $\prec$ y $<_T$ son definibles, F resulta serlo también; por lo tanto existe $H \subseteq \aleph_1$ el cual resulta ser homogñeo para F y además $|H| = \aleph_1$. Sea

$$B = \{x \in \aleph_1 \mid |\{\alpha \in H \mid x <_T \alpha\}| = \aleph_1\}$$

Puesto que, todo nivel es contable (T es un $\aleph_1$- árbol), hay elementos en B de cada nivel; si probamos que cualesquiera dos elementos de B son $<_T$-comparables, B sería la $\aleph_1$- rama que necesitamos.

Supongamos que no, es decir, existen $x, y \in B$ que son $<_T$- incomparables, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $x \prec y$.

Tanto x como y tienen $\aleph_1$ $<_T$- sucesores en H, entonces podemos encontrar $\alpha, \beta, \mu \in H$ tal que:

$$\alpha < \beta < \mu,\ x <_T \alpha, \mu \text{ y } y <_T \beta$$

Por la definición de $\prec$ debemos tener que $\alpha \prec \beta$ y además $\mu \prec \beta$; entonces,

$$F(\{\alpha, \beta\}) = 1 \text{ y } F(\{\beta, \mu\}) = 0$$

lo cual contradice que H sea homogéneo.

Finalmente, note que si forzamos sobre L, el teorema puede ser adaptado para árboles definibles en el sentido muy amplio. La prueba es idéntica solo que usa el lema inmediatamente anterior.

5 La cota inferior

Ahora probamos que la propiedad definible del árbol implica la consistencia de un cardinal Π^1_1- reflejante, desde ahora $\aleph_1$ es $\aleph_1^V$.

Teorema 8. *Si $\aleph_1$ tiene la propiedad definible del árbol, entonces:*

$$L \models \aleph_1 \textit{ es un cardinal } \Pi^1_1 \textit{ reflejante}$$

Prueba. Veamos primero que

$$L \models \aleph_1 \text{ es inaccesible}$$

Supongamos que no, es decir, $\aleph_1$ es no inaccesible en L, entonces existe $x \in \omega^\omega$ tal que $\aleph_1 = \aleph_1^{L[x]}$.

Entonces dentro de $L[x]$ hay un árbol de Aronszajn Especial T el cual es definible desde el buen orden de $(H_{\omega_1}, \varepsilon)^{L[x]}$, el cual es Σ_1 definible sobre $(H_{\omega_1}, \varepsilon)^{L[x]}$.

Ahora, T no puede tener una rama cofinal en V porque esto implicaría que $\aleph_1^{L[x]} < \aleph_1$ ya que una rama cofinal en V es alo más contable. Similarmente por relativización. para cada real x, $\aleph_1$ es inaccesible en $L[x]$.

Ahora probamos que $\aleph_1$ es una cardinal Π_1^1- reflejante en L. Para ello utilizamos la equivalencia dada anteriormente para la propiedad de extensión. Como $\aleph_1$ es inaccesible en L tenemos que $(H_{\aleph_1^V})^L = L_{\aleph_1^V} = (V_{\aleph_1^V})^L$. $(L \models V = L)$ Sea $\langle A_\alpha \mid \alpha < \aleph_1 \rangle$ una enumeración definible de $\wp^L(\aleph_1) \cap \Sigma_n$ (subconjuntos Σ_n definibles de $\aleph_1$) de tipo de orden $\aleph_1$. Definamos un árbol T de funciones por:

$$f \in T \iff f : \tau \to \{0,1\},\ \tau < \aleph_1 \text{ y } |\textstyle\bigcap_{\alpha<\tau} A_\alpha^{f(\alpha)}| = \aleph_1$$

donde $A^0 = A$ y $A^1 = \aleph_1 \setminus A$. El nivel T_τ del árbol T consta de todas las funciones $f : \tau \to \{0,1\}$ que tienen la propiedad anterior y $T = \bigcup_{\tau<\aleph_1} T_\tau$ y el orden de T es, $f <_T g$ si y solo si $f \subseteq g$.

Como $\aleph_1$ es inaccesible en L, T es un ω_1- árbol; $|T| \leq 2^\tau < \aleph_1$ pues $\tau < \aleph_1$; además la verdad de Σ_n fórmulas es Σ_{n+1} definible (Si $\mathfrak{M} \models \psi$ donde ψ es una fórmula Σ_n entonces la fórmula $\exists x(\mathfrak{M} \models \psi)$ es Σ_{n+1}), entonces T resulta ser Σ_k definible sobre $(H_{\omega_1}, \varepsilon)$ para algún k.

Por la propiedad definible del árbol tenemos que T tiene una rama cofinal $\langle b_\alpha : \alpha < \aleph_1 \rangle$, sea $b = \bigcup_{\alpha<\omega_1} b_\alpha$, entonces b es una función $b : \aleph_1 \to \{0,1\}$; además b define un ultrafiltro U sobre $\wp^L(\aleph_1) \cap \Sigma_n$ por:

$$A_\alpha \in U \iff b(\alpha) = 0$$

Veamos que efectivamente U es un ultrafiltro. Primero veamos que es filtro.

Si $A_\alpha \in U$ $(b(\alpha) = 0)$, $A_\alpha \subseteq A_\beta$ y $b(\beta) = 1$, se tiene que existe $\delta < \aleph_1$ tal que $b_\delta(\beta) = 1$, además $b_\delta : \delta \to \{0,1\}$ es tal que $|\bigcap_{\gamma<\delta} A_\gamma^{f(\gamma)}| = \aleph_1$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\alpha < \beta$; como $b(\beta) = 1$ se tiene que:

$$|\textstyle\bigcap_{\gamma<\delta} A_\gamma^{f(\gamma)}| = \aleph_1$$

$$|A_1^{b_\delta(1)} \cap \ldots \cap A_\alpha^{b_\delta(\alpha)} \cap \ldots \cap A_\beta^{b_\delta(\beta)} \cap \ldots| = \aleph_1$$

$$|A_1^{b_\delta(1)} \cap \ldots \cap A_\alpha \cap \ldots \cap (\aleph_1 \setminus A_\beta) \cap \ldots| = \aleph_1$$

$$|A_1^{b_\delta(1)} \cap \ldots \cap A_\alpha \cap (A_\beta)^C \cap \ldots| = \aleph_1$$

$$|A_1^{b_\delta(1)} \cap \ldots \cap \emptyset \cap \ldots| = \aleph_1$$

Lo cual es contradictorio, entonces $b(\beta) = 0$ de donde $A_\beta \in U$. Ahora veamos que U es cerrado bajo intersecciones finitas:

Sean A_α y $A_\beta \in U$, entonces existe $\gamma < \alpha, \beta$ tal que $A_\gamma = A_\alpha \cap A_\beta$ pues la intersección de conjuntos Σ_n definibles es Σ_n definible. Ahora, si $b(\gamma) = 1$, existe $\delta < \aleph_1$ tal que $b_\delta(\gamma) = 1$, además $b_\delta : \delta \to \{0,1\}$ y $|\bigcap_{\tau<\delta} A_\tau^{f(\tau)}| = \aleph_1$, entonces:

$$|A_1^{b_\delta(1)} \cap \ldots \cap A_\gamma^{b_\delta(\gamma)} \cap \ldots \cap A_\alpha^{b_\delta(\alpha)} \cap \ldots \cap A_\beta^{b_\delta(\beta)} \cap \ldots)| = \aleph_1$$

$$|A_1^{b_\delta(1)} \cap \ldots \cap (\aleph_1 \setminus A_\gamma) \cap \ldots \cap A_\alpha \cap \ldots \cap A_\beta \cap \ldots)| = \aleph_1$$

$$|A_1^{b_\delta(1)} \cap \ldots \cap (A_\alpha \cap A_\beta)^C \cap \ldots \cap A_\alpha \cap \ldots \cap A_\beta \cap \ldots)| = \aleph_1$$

$$|A_1^{b_\delta(1)} \cap \ldots \cap \emptyset \cap \ldots| = \aleph_1$$

Lo cual resulta ser de nuevo contradictorio, entonces $b(\gamma) = 0$, $A_\alpha \cap A_\beta \in U$. Por último supongamos que U no es maximal, entonces existe $F \supset U$ que es filtro, así existe $\eta < \aleph_1$ tal que $A_\eta \in F$ pero $A_\eta \notin U$ de donde $b(\eta) = 1$

Más aún, el ultrafiltro U resulta ser contablemente completo sobre $\wp^L(\aleph_1) \cap \Sigma_n$ (la prueba es idéntica a la del caso finito). Ahora definimos la "ultrapotencia" como sigue:

$$f \in ult(L_{\aleph_1}, U) \iff f : \aleph_1 \to L_{\aleph_1}, f \in L \text{ y } f \text{ es } \Sigma_n \text{ definible sobre } (H_{\omega_1}, \varepsilon)$$

$$f \equiv g \iff \{\alpha \mid f(\alpha) = g(\alpha)\} \in U$$

$$fEg \iff \{\alpha \mid f(\alpha) \in g(\alpha)\} \in U$$

La "ultrapotencia" está bien fundamentada por la completez del ultrafiltro y existe una Σ_n inmersión elemental $j : L_{\aleph_1} \to ult(L_{\aleph_1}, U)$ definida por $j(x) = [f_x]_U$ donde $f_x : \wp^L(\aleph_1) \cap \Sigma_n \to \{x\}$ es la función constante de valor

x, de tal manera que $L_{\aleph_1} \prec_n ult(L_{\aleph_1}, U)$.

Ahora como $L_{\aleph_1} \models V = L$ si n es suficientemente grande, se tiene que

$$ult(L_{\aleph_1}, U) \models V = L$$

de ahí su colapso transitivo es realmente L_α para algún $\alpha > \aleph_1$, entonces $L_{\aleph_1} \prec_n L_\alpha$, de donde obtenemos la propiedad de extensión deseada y por la equivalencia de la propiedad de extensión y Π_1^1 reflexión, tenemos que $\aleph_1$ es Π_1^1 reflejante en L; finalmente por relativización obtenemos para cada real x, que $\aleph_1$ es Π_1^1 reflejante en $L[x]$.

□

6 Una aplicación: Módulos libres de torsión y κ-libres de torsión

En esta sección damos una aplicación de la propiedad de extensión definible que tienen los cardinales Π_1^1- reflejantes a módulos libres y κ-libres de torsión inspirados en los trabajos del profesor Luis Miguel Villegas Silva en [5].

Definicion 17. *Un R-módulo M se dice libre de torsión si para cada $m \in M$, $m \neq 0_M$ existe un R-homomorfismo $f : M \to R$ tal que $f(m) \neq 0_R$.*

Definicion 18. *Sea κ un cardinal regular y M un R-módulo; decimos que M es κ-libre de torsión si todo submódulo de cardinalidad $< \kappa$ es libre de torsión.*

Veamos que el concepto de "ser libre de torsión "es expresable mediante una fórmula, para esto seguimos los siguientes pasos:

Claramente los conceptos de ordinal, ordinal límite, función, dominio y rango son expresables por una fórmula; sean $Or(x)$, $Lim(x)$, $Fun(f)$, $dom(f)$ y $ran(f)$ las fórmulas que definen estos conceptos respectivamente.

Ahora describirmos un R- homomorfismo de módulos:

$Hom(f, R, N) \iff Fun(f) \wedge dom(f) = R \wedge ran(f) \subseteq N \wedge [\forall n_1, n_2 \in N(f(n_1 + n_2) = f(n_1) + f(n_2)) \wedge \forall r \in R \forall n \in N(f(rn) = rf(n))]$

por último la fórmula que dice "ser libre de torsión "Φ es:
r

$$\forall x(x \in M \wedge x \neq 0_M \rightarrow \exists f(Hom(f, R, M) \wedge f(x) \neq 0_R))$$

Nota: Es claro que si M es libre de torsión, entonces es κ-libre de torsión. La pregunta natural es saber si también se tiene el recíproco. Valencia, Mendoza y Villegas en [5] muestran que si κ es un cardinal débilmente compacto se tiene el recíproco; a continuación damos una versión más débil utilizando cardinales Π^1_1- reflejantes.

Teorema 9. *Sean κ un cardinal Π^1_1 reflejante, y M un R-módulo κ libre de torsión tal que*

$$M = \bigoplus_{\alpha<\kappa} M_\alpha \text{ y } |M_\alpha| < \kappa$$

donde M_α es definible (posiblemente con parámetros) sobre V_κ para cada $\alpha < \kappa$, entonces M es libre de torsión.

Prueba: Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $R \in V_\kappa$ y que $M \subseteq V_\kappa$, ahora consideremos la siguiente sucesión de R- módulos.

$\mathfrak{M}_0 = M_0$
$\mathfrak{M}_{\alpha+1} = \mathfrak{M}_\alpha \bigoplus M_{\alpha+1}$
$\mathfrak{M}_\gamma = \bigcup_{\delta<\gamma} \mathfrak{M}_\delta$

Sea $\psi_\alpha(x, a_\alpha)$, $a_\alpha \in V_\kappa$ la fórmula que define a M_α, veamos que cada $\mathfrak{M}_\alpha$ también resulta ser definible sobre V_κ:

Claramente $\mathfrak{M}_0 = M_0$ es definible por $\psi_0(x, a_0)$; ahora supongamos por inducción que $\mathfrak{M}_\alpha$ es definible por $\varphi_\alpha(x, b_\alpha)$, $b_\alpha \in V_\kappa$ y veamos que $\mathfrak{M}_{\alpha+1}$ también resulta ser definible (en V_κ).

Sea $x \in \mathfrak{M}_{\alpha+1}$, entonces $x \in \mathfrak{M}_\alpha \bigoplus M_{\alpha+1}$, por lo tanto $x = (m, n)$ donde $m \in \mathfrak{M}_\alpha$ y $n \in M_{\alpha+1}$, entonces la fórmula:

$$\varphi_{\alpha+1}(x, b_{\alpha+1}) : x = (m, n) \wedge \varphi_\alpha(m, b_\alpha) \wedge \psi_{\alpha+1}(n, a_{\alpha+1})$$

define a $\mathfrak{M}_{\alpha+1}$.

Ahora consideremos el predicado $\bar{\mathfrak{M}} = \{(\alpha, \mathfrak{M}_\alpha) : \alpha < \kappa\}$ y la estructura

$$(V_\kappa, \varepsilon, \bar{\mathfrak{M}})$$

Tenemos que $\bar{\mathfrak{M}}$ resulta ser un predicado definible.

Ahora utilizamos la propiedad de extensión definible. Como κ es Π^1_1- reflejante, existen X un conjunto transitivo y $\mathfrak{A} \subseteq X$ tal que $\kappa \in X$ y

$$(V_\kappa, \varepsilon, \mathfrak{M}) \prec_n (X, \varepsilon, \mathfrak{A})$$

Además, $M = \mathfrak{M}_\kappa = \bigcup_{\alpha<\kappa} M_\alpha$ y por hipótesis tenemos:

$$(V_\kappa, \varepsilon, \mathfrak{M}) \models \forall \alpha M_\alpha \text{ es libre de torsión}$$

de donde:

$$(X, \varepsilon, \mathfrak{A}) \models \forall \alpha M_\alpha \text{ es libre de torsión}$$

y como $\kappa \in X$

$$(X, \varepsilon, \mathfrak{A}) \models M_\kappa = M \text{ es libre de torsión}$$

$\square$

Bibliografía

[1] AMIR LESHEM, *On the Consistency of the Definable Tree Property on* $\aleph_1$, The Journal of Symbolic Logic, Vol 65, No. 3 (Sept 2000)

[2] THOMAS JECH, *Set Theory*, The Third Millennium Edition, Springer (2002).

[3] AKIHIRO KANAMORI, *The Higher Infinity*, Perspectives in Mathematical Logic, Springer- Verlag, 1994.

[4] KENNETH KUNEN, *Set Theory. An Introduction to Independence Proofs*, Studies in logic and the foundations of mathematics v102 (1983).

[5] JUAN NIDO, PABLO MENDOZA, LUIS MIGUEL VILLEGAS, *Weakly Compact Cardinals and* κ*- torsionless modules*, En preparación.