UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Categoricidad de los espacios de Banach

Edwin Rodrigo Celis Montealegre

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Ciudad, Colombia
2018

Categoricidad de los espacios de Banach

Edwin Rodrigo Celis Montealegre

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Matemático

Director:
Ph.D. Andres Villaveces

Universidad Nacional de Colombia
Facultad Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2018

A mis padres, y a ti, la colmena de paciencia y amor: Anyeyita

“Un matemático que no es también un poco poeta no será jamás un matemático completo”

Karl Weierstrass

Contenido

Capítulo 1

Introducción

El análisis funcional es un vástago de la matemática que posee una belleza tan intrigante que hace necesario, para aquél que la contempla, hacer muchos altos en el camino. En un primer encuentro con el análisis funcional se queda más plagados de dudas que de certezas. Sin ir a los detalles y recónditos laberintos que explora el análisis funcional podemos prestar atención a uno de los elementos que reviste importancia, los espacios de Banach. Dichos espacios poseen una métrica d la cual dota al conjunto subyacente de la noción de "distancia"de dos puntos cualesquiera. La noción de sucesiones de Cauchy convergente, desempeña un papel importante, en la definición de espacio de Banach. Por lo tanto, una lógica que capture los espacios de Banach debe ser capaz de decidir que " para toda sucesión de Cauchy de elementos del espacio existe un elemento del espacio el cual es su límite ". Esto nos lleva a que dicha lógica debe cuantificarse sobre conjunto contables. La lógica de primer grado no tiene esa posibilidad. Por tanto, es necesario tomar una opción alterna a la lógica de primer orden (LPO) para estudiar los espacios de Banach. En la búsqueda de extender la LPO, la lógica encuentra varias alternativas, entre ellas se encuentran la lógica continua de primer orden [4] y lógica de Henson de las fórmulas positivas acotadas [3]. En el segundo capitulo se estudia la natural generalización de LPO a la lógica continua de primer orden. Una vez tengamos un lenguaje que capture los espacios de Banach, se encuentran resultados análogos a la teoría de modelos para la LPO, parte de la cual también se presenta en el segundo capítulo. En ese ir descubriendo análogos entre la LPO y la lógica continua se llega a un punto crucial cuando se desea encontrar el análogo al teorema de Morley en LPO. El teorema de Morley caracteriza las teorías ω_1-categóricas de la siguiente forma [6].

Teorema 1.0.1 ***Teorema de Morley de LPO.*** *Si T es numerable, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *T es $\omega-$estable y no tiene pares de Vaught.*
2. *T tiene extensiones primas.*
3. *Todo modelo numerable de T tiene una extensión prima.*

4. T es $\lambda-$categórico para todo $\lambda \geq \omega_1$.

5. T es $\lambda-$categórica para algún $\lambda \geq \omega_1$

6. T es ω_1-categórica.

Uno de los primeros matemáticos que estudio los ultraproductos de los espacios de Banach y puso en evidencia lo crucial del análogo al teorema de Morley en la lógica continua fue Ward Henson [2, 3]. Sus resultados lo llevaron a la siguiente conjetura.

Conjetura 1.0.1

- *Sea $\mathcal{K}$ una clase elemental $\delta-$categórico, con $\delta > \omega$, de espacios de Banach. Entonces $\mathcal{K}$ es categórico en todo cardinal $\kappa > \omega$.*
- *Sea una clase elemental $\delta-$categórica, con $\delta > \omega$. Entonces para todo $B \in \mathcal{K}$ esta muy cerca y determinado por un espacio de Hilbert.*

Como se observa, la primera parte de la conjetura es la versión del teorema de Morley para los espacios de Banach. El contenido de la primera parte de la conjetura, fue probado por Saharon Shelah [8] y por Itaï Ben Yaacov [11] de forma independiente.
Así que en parte se iba realizando la tarea de ir construyendo, de forma paralela a la LPO, una nueva lógica capaz de capturar los espacios de Banach y cuyos resultados modelos teóricos tenían su propia versión. Sin embargo, la segunda parte del contenido de la conjetura, dependía de encontrar definiciones análogas, en los espacios de Banach, a aquellas que tenían su versión en LPO, especialmente la noción de pregeometría. Uno de los resultado de la teoría de modelos de LPO, establece que para tener una pregeometría es suficiente poder definir una fórmula fuertemente minimal. Denotemos por $L_{LPO}(M)$ la LPO extendida al lenguaje $L(M)$, es decir, el conjunto de todas las fórmulas de primer orden con posible parámetros en M. Una fórmula $\varphi(x) \in L_{LPO}(M)$ se dice minimal en M si $\varphi(M)$ es infinita y para cada $\psi(x) \in L_{LPO}(M)$ se tiene que $\varphi(M) \cap \psi(M)$ es finito o bien $\varphi(M) \backslash \psi(M)$ es finito. Donde $\varphi(M)$ denota el conjunto de todas las realizaciones en M de la fórmula $\varphi(x)$. Y se dice que una fórmula $\varphi(x)$ es fuertemente minimal en M si es minimal en todo N tal que $M \preceq N$, donde $M \preceq N$ significa que todas las fórmulas $\varphi(x, a)$ con $a \in M$, que se realizan en M también se realizan en N. Finalmente decimos que el conjunto $D \subseteq M$ es minimal o fuertemente minimal en M si se define mediante alguna fórmula minimal o fuertemente minimal $\varphi(x) \in L_{LPO}(M)$.
Si es posible establecer un análogo en los espacios de Banach a un conjunto fuertemente minimal en el sentido antes descrito, se tendrá un resultado sorprendente. Para cada subconjunto $D \subseteq M$ fuertemente minimal definido sobre $A \subseteq M$, si se define para cada $X \subseteq D$, $cl_A(X) = acl(A \cup X) \cap D$, donde $acl(A \cup X)$ es la clausura algebraica del conjunto $A \cup X$, esto es, $acl(A \cup X)$ es el conjunto de todos los elementos cuya órbita es finita. Entonces $D_A = (D, cl_A)$ define una pregeometría. Y a cada pregeometría se le asocia una dimensión,

la dimensión de la pregeometría D_A (la dimensión del Rango de Morley de la fórmula que define a D_A), y a partir de ello encontrar una base. Así que encontrando un análogo a un conjunto fuertemente minimal en los espacios de Banach se tendrá una "base". Este hecho es vital en el análisis funcional puesto que reduciría sustancialmente el estudio de los espacios de Banach que posee un conjunto fuertemente minimal. Se podría pensar que dicho espacio es casi un espacio de Hilbert . Pero hay más todavía, para una teoría T numerable y ω_1-categórico, tal que $\varphi(x) \in L(A)$ es fuertemente minimal, se puede caracterizar las extensiones primas por la dimensión, y garantizar la existe de conjunto infinito de indiscernible. [5, 6]

Hastas aquí esta el contenido de la segunda parte de la conjetura. Pero hay más, cuando se tiene una T teoría ω_1-categórica en la lógica de primer orden y una fórmula fuertemente minimal $\varphi(x) \in L(M)$, se puede caracterizar los isomorfismos por medio de su dimensión, esto es, $M_1 \cong M_2$ si y solo si $dim_\varphi(M_1) = dim_\varphi(M_2)$. Por tanto, si se encuentra un análogo en los espacios de Banach a los conjuntos fuertemente minimales se tendrá una serie de implicaciones tanto en la clasificación, puesto que basta encontrar su dimensión de Morley de la fórmula que definen a los conjuntos fuertemente minimales, como a su estructura de espacio, caracterizado por una "base". Con ese espíritu Shelah y Usvyatsov, definen un tipo especial "tipos anchos.[el] que desempeña, dentro de la estructura de la lógica de primer orden, un potencial análogo a un tipo "fuertemente minimal". Si bien el tipo ancho no define una estructura de pregeometría, permite probar el contenido de la segunda parte de la conjetura [7]. En el tercer capítulo se estudia dichos resultados .

Por otro lado, hay un resultado del análisis que es crucial para detectar "tipo anchos çompletos, el teorema de Dvoretzky-Milman3.0.1. Bajo ciertas condiciones adicionales, se puede garantizar la existencia de "tipos anchos minimales". Estos tipos poseen una secuencia de Morley que son en particular una secuencia de indiscernibles. [7] Así que se tienen resultados análogos a los de suponer un conjunto fuertemente minimal. También se desarrolla en el capítulo tercero. El cuarto capítulo concluye la segunda parte del contenido de la conjetura de Henson y se incluirá la noción de Rango de Morley y la clausura algebraica en el contexto de espacios de Banach.

Capítulo 2

Construcción de la lógica continua de primer orden

2.1. Construcción de la lógica continua

A lo largo de este capítulo se construye la lógica de primer orden continua, su interpretación, el importante caso de ultraproductos de $L-$estructuras y algunos resultados acerca de existencia de modelos saturados, modelos homogéneos, modelos universales; entre otros resultados que conectan los principales resultados de la lógica de primer orden con la lógica continua de primer orden.

Construcción de lógica continua

La forma de construir la lógica continua de primer orden se hace de forma paralela a la construcción de la lógica de primer orden. Se extiende los posibles valores $\{0, 1\}$, asociados al valor semántico de verdadero y falso en la lógica de primer orden a una "gama"de opciones, cualquier valor del intervalo $[0, 1]$. Los predicados, incluyendo la relación de igualdad, se cambian por funciones del espacio métrico al intervalo $[0, 1]$. Los $[0, 1]$-valores de los predicados serán definidos por una métrica d, que cumple la función semántica de decidir que tan cerca esta del 0 ("que tan cerca esta de ser falso ") o del 1 ("que tan cerca esta de ser verdadero"). Lo que se desea en la lógica continua es que la métrica d , pueda definir una relación de equivalencia sobre los predicados y operaciones de la estructura, por lo que se requiere que los predicados y operaciones sean uniformemente continua con respecto a la métrica d. Se tendrá en la lógica continua $[0, 1]$-valores, los conectivos son funciones continuas sobre $[0, 1]$ y los cuantificadores sup e inf, definidos sobre las realizaciones de una fórmula dada. Denotaremos por LPO a la lógica de primer orden y por LPOC la lógica de primer orden continua. Si (M, d) es un espacio métrico compacto. Un predicado sobre M es una función uniformemente continua de M^n (donde n es la aridad del predicado) en algún intervalo acotado en $\mathbb{R}$. Una función o operación sobre M es una función uniformemente continua de M^n (para algún $n \geq 1$ aridad) en M.

Una estructura métrica $\mathfrak{M}$ consiste de un de un par (M, d) el cual es un espacio métrico, una familia $(R_i|i \in I)$ de predicados sobre M, una familia $(F_j|j \in J)$ de funciones sobre M, y una familia $(a_k|k \in K)$ de elementos distinguidos de M. Como se desea evaluar cada una de las fórmulas construidas en LPOC por la métrica d dentro de un intervalo compacto (se puede decidir que tan cerca esta al a o al b suponiendo que el intervalo sea $[a, b]$), tomamos el espacio métrico con las condiciones que garantice esto, así que el espacio métrico considerado es completo y acotado.

Conexión con la lógica de primer orden y algunos resultados

La lógica continua de primer orden satisface los teorema de compacidad, los teoremas de Löwenheim-Skolem, el argumento del diagrama, la existencia de modelos saturados y homogéneos, caracterización de eliminación de cuantificadores, el teorema de omisión de tipos, los resultados fundamentales de la teoría de la estabilidad y acercamientos análogos a los resultados esenciales de la teórica de modelos básica de la lógica de primer orden. [4]
Más aún, la teoría LPOC extiende a la teoría LPO. En efecto, a cada estructura matemática de LPO puede ser vista como una estructura matemática tomando la métrica discreta $d(a, b) = 1$, para a, b distintos. Todos los resultados de LPOC son generalizaciones de LPO.

2.1.1. Ejemplos

1. Un espacio métrico completo acotado (M, d) sin ninguna estructura adicional.

2. Una estructura M en el sentido usual de la lógica de primer orden. Se pone la métrica discreta sobre el universo y una relación es considerada como un predicado que toman valores de verdad en el conjunto $\{0, 1\}$

3. Álgebras de Banach:la multiplicación es incluida como una operación; si el álgebra tiene una identidad multiplicativa, este podría ser elegido como una constante.

4. Los espacios de Hilbert con producto interno puede ser tratados como espacios de Banach, con la condición de que el producto interno sea incluido como un predicado binario.

5. Si $(\Omega, \mathtt{B}, \mu)$ es un espacio de probabilidad, podemos construir una estructura métrica (M, d) de éste, en el cual M es el álgebra de medida de $(\Omega, \mathtt{B}, \mu)$ (elementos de $\mathtt{B}$ modulo conjuntos de medida 0) y d es definida como la medida de la diferencia simétrica. Como operaciones sobre M tomamos las operaciones Booleanas $\cup, \cap, ^c$, como predicados tomamos la medida μ y como elementos distinguidos el $0, 1$ de M.

Se considerara en lo sucesivo las siguientes condiciones:

1. El diámetro del universo del espacio métrico es acotado.

2. Un modulo de continuidad uniforme para cada predicado y cada función.

3. Un intervalo cerrado acotado de valores positivos para cada predicado.

Por simplicidad, y sin perdida de generalidad, podemos asumir que nuestra signatura L satisface $D_L = 1$ (esto es, el diámetro del espacio métrico considerado es la unidad) y $I_P = [0,1]$ para cada símbolo de predicado P.
Observación Si M es una L-estructura y A un subconjunto cerrado dado de M^n, entonces $\mathfrak{M}$ puede expandirse añadiendo el predicado $x \mapsto dis(x, A)$, donde x recorre M^n y la $dist$ denota la función distancia con respecto a la métrica máxima sobre el espacio producto M^n. Note que en ciertas circunstancia puede ser añadido el predicado χ_A, esto solo se da si χ_A es uniformemente continua, lo cual fuerza al subconjunto A a tener una distancia positiva de su complemente sobre M^n.

2.2. Módulos de continuidad uniforme

En esta sección definiremos el modulo de continuidad uniforme para una función dada y recogeremos varios resultados.

Definición 2.2.1 *Módulo de continuidad uniforme (CU). Si (M, d) y (M', d') son espacios métricos y $f : M \to M'$ es cualquier función, decimos que $\Delta : (0,1] \to (0,1]$ es un modulo de continuidad uniforme para f si para todo $\epsilon \in (0,1]$ y para todo $x, y \in M$ se tiene*

$$d(x, y) < \Delta(\epsilon) \Rightarrow d'(f(x), f(y)) \leq \epsilon$$

Decimos que f es uniformemente continua si tiene un modulo de continuidad uniforme.

Teorema 2.2.1 *Suponga que $f : M \to M'$ y $f' : M' \to M''$ son funciones entre espacios métricos, y sean Δ y Δ' los módulos de continuidad uniforme para f y f' respectivamente. Entonces la composición $f' \circ f$ es uniformemente continua.*

Demostración: en efecto, para cada $r \in (0,1)$ la función $\Delta(r\Delta'(\epsilon))$ es un modulo de continuidad uniforme para $f' \circ f$. Veamos que para $r \in (0,1)$, se tiene que $\Delta(r(\Delta'(\epsilon)))$ es un módulo de continuidad para $f' \circ f$. Sean $x, y \in M$ tales que $d(x, y) < \Delta(r\Delta'(\epsilon))$ lo cual implica que $d'(f(x), f(y)) < r\Delta'(\epsilon) < \Delta'(\epsilon)$. Por lo tanto $d''(f'(f(x)), f'(f(y))) < \epsilon$. □

Sean M, M' espacios métricos (con métricas d, d' respectivamente) y sean f y $\{f_n | n \geq 1\}$ funciones de M en M'. Recordemos que $\{f_n | n < \omega\}$ converge uniformemente a f sobre M si

$$\forall \epsilon \exists N \forall n \forall x (\epsilon > 0, n > N, d'(f_n(x), f(x)) \leq \epsilon)$$

Teorema 2.2.2 *Sean M, M', f y $\{f_n|n < \omega\}$ como en el teorema anterior, y supongamos que $\{f_n|n < \omega\}$ converge uniformemente a f sobre M. Si cada una de las funciones f_n es uniformemente continua, entonces f es uniformemente continua.*

Demostración: Un modulo de continuidad uniforme para f puede obtenerse de los módulos Δ_n para f_n, para cada $n \geq 1$ y de una función $N : (0, 1] \to \omega$ que satisface

$$\forall\epsilon\forall n\forall x(\epsilon > 0, n > N(\epsilon), d'(f_n(x), f(x)) \leq \epsilon). \tag{2-1}$$

Dado $\epsilon > 0$, tómese $\Delta(\epsilon) = \Delta_n(\epsilon/3)$ donde $n = N(\epsilon/3) + 1$. Veamos que $\Delta(\epsilon)$ es un modulo para f. Sean $x, y \in M$ tales que $d(x, y) < \Delta(\epsilon) = \Delta_n(\epsilon/3)$, por ser $\Delta_n(\epsilon/3)$ modulo de f_n, se tiene entonces que $d(f_n(x), f_n(y)) < \epsilon/3$. Además por ser $N(\epsilon)$ como en 2-1, se tiene que $d(f_n(x), f(x)) \leq \epsilon/3$ y $d(f_n(y), f(y)) \leq \epsilon/3$ así que

$$d(f(x), f(y)) \leq d(f_n(x), f(x)) + d(f_n(y), f(y)) + d(f_n(x), f_n(y)) \leq \epsilon$$

□

Teorema 2.2.3 *Suponga $f, f_n : M \to M'$ y $f', f'_n : M' \to M''$ funciones entre espacios métricos. Si \$$\{f_n|n < \omega\}$ converge uniformemente a f sobre M y $\{f'_n|n < \omega\}$ converge uniformemente a f' sobre M', entonces $(f'_n \circ f_n|n < \omega)$ converge uniformemente a $f' \circ f$ sobre M.*

Demostración: Dado $\epsilon > 0$, sea $\epsilon' = min\{\Delta'(\epsilon/2), \epsilon/2\}$, entonces existe $N(\epsilon)$ tal que para todo $n > N(\epsilon)$ se tiene $d(f_n(x), f(x)) < \epsilon' \leq \Delta'(\epsilon/2)$ y $d'(f'_n(y), f'(y) < \epsilon' \leq \epsilon/2$, en particular para $y = f_n(x)$, se tiene que $d'(f'_n(f(x)), f'(f(x)) \leq \epsilon/2$. Tenemos entonces

$$d'(f'_n(f_n(x)), f'(f(x))) \leq d'(f'_n f_n(x), f'(f_n(x))) + d'(f'(f_n(x)), f'(f(x))) \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

□

Es fundamental para la lógica de primer orden continua las operaciones de sup e inf sobre conjuntos acotados de los números reales. Usamos estas funciones para definir una nueva función a partir de una dada de la siguiente manera. Supongamos que M, M' son espacios métricos y $f : M \times M' \to \mathbb{R}$, definimos las funciones $sup_y f$ y $inf_y f$ de M a $\mathbb{R}$ por

$$F(x) = sup_y f(x, y) = sup\{f(x, y)|y \in M'\}$$
$$G(x) = inf_y f(x, y) = inf\{f(x, y)|y \in M'\}$$

para todo $x \in M$. La perspectiva es que sup_y y inf_y se identifiquen como los cuantificadores de la LPOC, que eliminan la variable o enlazan la variable y, como en el caso de los cuantificadores $\forall, \exists$ de LPO.

Teorema 2.2.4 *Sean F, $G :\to (0, 1]$ funciones arbitrarias, entonces las dos siguientes condiciones son equivalentes*

1. *F, G tienen la propiedad siguiente*

$$\forall(\epsilon > 0)\exists(\delta > 0)\forall(x \in X)(F(x) \leq \delta \Rightarrow G(x) \leq \epsilon)$$

2. *existe una función continua creciente $\alpha : [0,1] \to [0,1]$ tal que $\alpha(0) = 0$ y*

$$\forall(x \in X)(G(x) \leq \alpha(F(x)))$$

Demostración: Defina la siguiente función (posiblemente continua) $g : [0,1] \to [0,1]$ por

$$g(t) = sup\{G(x)|F(x) \leq t\}$$

Si $t_0 < t_1$ entonces $\{G(x)|F(x) \leq t_0\} \subset \{G(x)|F(x) \leq t_1\}$. por tanto $g(t_0) < g(t_1)$. Dado un ϵ, la δ que satisface la primera condición $\delta(\epsilon)$ tendrá que ser mayor para un cierto $t \in (0,1]$, por tanto, tomamos el sup sobre todos aquellos valores en los que ya están asegurados algunos $G(x)$, y así $\{G(x) : F(x) \leq t\}$ es no vacío. Si por cada ϵ dado, denotamos por δ_ϵ el conjunto de todos los valores ϵ para los cuales δ satisface la primera condición, se tiene para algún valor $t < \delta$ que satisface $g(t) \leq inf(\delta_\epsilon)$. Por tanto si $t \to 0$, entonces $inf(\delta_\epsilon) \to 0$. Por lo que $g(t) \to 0$ cuando $t \to 0$. Es claro que $G(x) \leq g(F(x))$ (La definición de sup). Verificaremos ahora que $g(0) = 0$. En efecto, $g(0)$ implica que $F(x) = 0$, y por la condición 1 se tendrá que $G(x) \leq \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$.
Para completar la prueba construiremos un una función continua creciente $\alpha : [0,1] \to [0,1]$ tal que $\alpha(0) = 0$ y $g(t) \leq \alpha(t)$ para todo $t \in [0,1]$. Consideremos $\{(\frac{1}{n})|n < \omega\}$. Definimos $\alpha(0) = 0$ y $\alpha(1) = 1$ y $\alpha(\frac{1}{n}) = g(\frac{1}{n-1})$ para $n < \omega$. Se toma α lineal para cada intervalo de la forma $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$, $n < \omega$. Es clara la continuidad de α. Sea $\frac{1}{n+1} \leq t \leq \frac{1}{n}$ con $n < \omega$, se sabe que $g(t) < g(\frac{1}{n}) = \alpha(\frac{1}{n+1}) < \alpha(t)$. Por tanto $g(0) = 0 = \alpha(0)$.
Dado $\epsilon > 0$, consideremos $\delta = sup\{s|\alpha(s) \leq \epsilon\}$. Si $F(x) \leq \delta$, entonces existe s tal que $\alpha(s) \leq \epsilon$ y $F(x) \leq s$. Por ser α creciente, se sigue que $\alpha(F(x)) \leq \alpha(s) \leq \epsilon$. □

Teorema 2.2.5 *La función α del teorema anterior puede ser reemplazada por una función creciente $\Delta : (0,1] \to (0,1]$ que satisface la siguiente condición*

$$\forall(x \in X)(F(x) \leq \Delta(\epsilon) \Rightarrow G(x) \leq \epsilon) \tag{2-2}$$

para todo $\epsilon \in (0,1]$.

Demostración: Dada una función Δ que satisfaga la condición anterior, defina $g : [0,1] \to [0,1]$ por $g(t) = inf\{s \in (0,1]|\Delta(s) > t\}$.
$g(0) = inf\{s \in (0,1]|\Delta(s) > 0\}$, que se verifica para todo $s \in (0,1]$, puesto $\Delta > 0$, así que $g(0) = 0$. Por otro lado si $t_1 < t_2$ se tiene que $\{s \in (0,1]|\Delta(s) > t_2\} \subset \{s \in (0,1]|\Delta(s) > t_1\}$, por tanto $g(t_1) \leq g(t_2)$, por lo que g resulto ser creciente. Sea $t \in [0, \Delta(\epsilon))$, consideremos $\Delta_t(\epsilon)$ el conjunto de todas las Δ que satisfacen la condición 2-2, por lo tanto $g(t) \leq \epsilon$. Luego

g tiende a 0 cuando t lo hace. Ahora veremos que $G(x) \leq g(F(x))$ para todo $x \in X$. En efecto, $g(F(x)) = \{s \in (0,1] | \Delta(s) > F(x)\}$, entonces $G(x) \leq s$, por lo tanto $G(x) \leq g(F(x))$. Ahora podemos construir α de forma similar a como se construyó en el teorema 2.2.4. Así podemos construir una función continua, creciente $\alpha : [0,1] \to [0,1]$ con $\alpha(0) = 0$ tales que si F, G son funciones que satisfacen 2-2 para cada $\epsilon \in (0,1]$, entonces tenemos

$$\forall x \in X(G(x) \leq \alpha(F(x)))$$

□

2.3. $L-$Fórmulas

Conforman los símbolos de L, los símbolos de predicados, de funciones y constantes, junto con sus módulos de continuidad uniforme ; éstos son los símbolos no lógicos. Los símbolos lógicos son:

1. símbolo d, la métrica para el espacio métrico subyacente,
2. Un conjunto infinito V_L de variables,
3. un símbolo para cada función continua $u : [0,1]^n \to [0,1]$ de cualquier variable finita $n \geq 1$ (éstas desempeñan la función de conectivos), y
4. los símbolos sup y inf, los cuales cumplen el papel de cuantificadores lógicos.

La cardinalidad de L, denotada por $card(L)$, es el menor cardinal infinito mayor o igual al número de símbolos no lógicos de L

2.3.1. Términos de L

Los términos son formado inductivamente, exactamente como en la LPO. Cada variable y símbolo de constante es un L-término. Si f es un símbolo de función n-aria y $t_1, \cdots, t_n$ son L-términos, entonces $f(t_1, \cdots, t_n)$ es un L-término. Todos los L-términos se construyen de esta forma.

2.3.2. fórmulas atómicas de L

Las fórmula s atómicas de L son las expresiones de la forma $P(t_1, \cdots, t_n)$, en el cual P es un símbolo de predicado n-ario de L y $t_1, \cdots, t_n$ son L-términos, así como $d(t_1, t_2)$, en donde t_1, t_2 son L-términos. Observe que el símbolo lógico d para la métrica es tratado formalmente como un símbolo de predicado binario, exactamente a como el símbolo $=$ se trata en LPO.

2.3.3. fórmulas de L

Las fórmulas son también construidas inductivamente, y la estructura básica de la inducción es similar a la definición correspondiente en LPO. En este caso las funciones continuas son los conectivos y el sup y inf son usados formalmente en la forma que los cuantificadores son usados en la LPO. La definición precisa es como sigue

Definición 2.3.1 *La clase de las L-fórmulas es la menor clase de expresiones que satisface las siguientes condiciones*

1. *Las funciones atómicas de L son L-fórmulas.*
2. *Si* $u : [0,1]^n \to [0,1]$ *es continua y* $\phi_1, \cdots, \phi_n$ *son fórmulas, entonces* $u(\phi_1, \cdots, \phi_n)$ *es una L-fórmula.*
3. *Si* ϕ *es una L-fórmula y* x *es una variable, entonces* $sup_x\phi$ *y* $inf_x\phi$ *son L-fórmulas.*

Podemos extender todas las definiciones que se hacen en LPO con respecto a las variables, fórmulas y la relación entre ellas al caso de la lógica de primer orden continua. Su extensión es por supuesto la más natural posible. Así, por ejemplo, una L-fórmula es libre de cuantificadores si dicha fórmula esta generada inductivamente sin usar en ningún paso sup_x ni inf_x. Cuando t es un término y las variables que aparecen están entre las variables $x_1, \cdots, x_n$, indicamos esto escribiendo a t por $t(x_1, \cdots, x_n)$. Similarmente, escribimos una L-fórmula como $\phi(x_1, \cdots, x_n)$ para indicar que las variables libre están en el conjunto de las variables $\{x_1, \cdots, x_n\}$

2.4. Subestructuras

Cada espacio seudométrico induce un espacio métrico el cual surge de identificar cada par de puntos que tengan una distancia nula. Una vez tenemos un espacio métrico, se procede a completarlo (un completado de un espacio métrico M es un espacio métrico completo $\tilde{M}$ para el cual existe una inmersión isométrica $f : M \to \tilde{M}$ tal que $f(M)$ es denso en $\tilde{M}$). [10] Así que si definimos una M sub-estructura para un espacio seudométrico, podemos seguir cada paso anotado para tener una L-estructura sobre el espacio métrico y finalmente sobre su completado. Procedemos de la siguiente forma: sea L un lenguaje fijo para una estructura métrica. Consideremos que (M_0, d_0) es un espacio seudométrico, tal que su diámetro $D_L \leq k$ con $k \in \mathbb{R}$. Una L-estructura $\mathfrak{M}_0$ para (M_0, d_0) es una estructura con las siguientes condiciones:

1. para cada símbolo de predicado P de L (de aridad n) una función $P_0^{\mathfrak{M}}$ de M_0^n en I_P (intervalo de la forma $[a_P, b_P]$), que tiene Δ_P como modulo de continuidad uniforme.
2. Para cada símbolo de función f de L (de aridad n) una función $f_0^{\mathfrak{M}}$ de M_0^n en M_0 que tiene Δ_P como modulo de continuidad uniforme;

3. Para cada símbolo de constante $c \in L$ un elemento $c_0^{\mathfrak{M}}$ de M_0.

Si (M, d) es el espacio métrico cociente inducido por (M_0, d_0), cuya función canónica es $\pi : M_0 \to M$. Entonces

1. Para cada símbolo de predicado P de L (de aridad n) definimos $P^{\mathfrak{M}}$ de M^n en I_P eligiendo $P^{\mathfrak{M}}(\pi(x_1), \cdots, \pi(x_n)) = P_0^{\mathfrak{M}}(x_1, \cdots, x_n)$, para cada $x_1, \cdots, x_n \in M_0$;

2. Para cada símbolo de función f de L (de aridad n) definimos $f^{\mathfrak{M}}$ de M^n en M tomando $\pi(f^{\mathfrak{M}_0}(x_1, \cdots, x_n)) = f^{\mathfrak{M}_0}((\pi(x_1), \cdots, \pi(x_n))$ para cada $x_1, \cdots, x_n \in M_0$;

3. Para cada símbolo de constante c de L definido por $c^{\mathfrak{M}} = \pi(c^{\mathfrak{M}_0})$

el diámetro de (M, d) es igual al diámetro de (M_0, d_0). Veamos que $P^{\mathfrak{M}}$ y $f^{\mathfrak{M}}$ están bien definidas. Sean $d_0(x, y) = 0$, con $x = (x_1, \cdots, x_n)$ y $y = (y_1, \cdots, y_n)$, por la continuidad uniforme de $P_0^{\mathfrak{M}}$, se tiene que $|P_0^{\mathfrak{M}}(x) - P_0^{\mathfrak{M}}(y)| \leq \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$, por lo tanto $P^{\mathfrak{M}}(\pi(y_1), \cdots, \pi(y_n)) = P_0^{\mathfrak{M}}(y) = P_0^{\mathfrak{M}}(x) = P^{\mathfrak{M}}(\pi(x_1), \cdots, \pi(x_n))$. El mismo argumento aplicado a $f^{\mathfrak{M}_0}$ nos lleva a que $d(f_0^{\mathfrak{M}}(x), f_0^{\mathfrak{M}}(y)) = 0$, por lo que $\pi(f_0^{\mathfrak{M}}(x)) = \pi(f_0^{\mathfrak{M}}(y))$.

2.5. Semántica

Sea $\mathfrak{M}$ una L-estructura, con (M, d) como su espacio métrico subyacente, y sea A un subconjunto de M. Extendemos a L a un lenguaje $L(A)$ añadiendo un símbolo de constante $c(a)$ a L por cada elemento $a \in A$. Su interpretación en M es la canónica, tomando la interpretación de $c(a) = c_a$ como a, para cada $a \in M$. Llamamos c_a el apodo de a en $L(A)$. La lógica de primer orden continua para espacios métricos, es tal que para cada $L(M)-$sentencia σ, $\sigma^{\mathfrak{M}}$ define un valor en $[0, 1]$

Ahora definimos por inducción la interpretación de las fórmulas en $\mathfrak{M}$, donde todos los términos mencionados son $L(M)$-términos y no contienen variables.

Definición 2.5.1 *Interpretación de fórmulas*

1. *$(d(t_1, t_2))^{\mathfrak{M}} = d(t_1^{\mathfrak{M}}, t_2^{\mathfrak{M}})$ para todo t_1, t_2 términos.*

2. *Para cada símbolo de predicado n-ario P de L y todo $t_1, \cdots, t_n$ términos*

$$(P(t_1, \cdots, t_n))^{\mathfrak{M}} = P^{\mathfrak{M}}(t_1^{\mathfrak{M}}, \cdots, t_n^{\mathfrak{M}});$$

3. *para toda $L(M)$-sentencia $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ y cualquier función continua $u : [0, 1]^n \to [0, 1]$*

$$(u(\sigma_1, \cdots, \sigma_n))^{\mathfrak{M}} = u(\sigma_1^{\mathfrak{M}}, \cdots \sigma_n^{\mathfrak{M}});$$

4. *para toda $L(M)$- fórmula $\phi(x)$, $(sup_x \phi(x))^{\mathfrak{M}}$ es el supremo en $[0, 1]$ del conjunto $\{\phi(a)^{\mathfrak{M}} | a \in M\}$;*

5. *para toda $L(M)$- fórmula $\phi(x)$, $(inf_x\phi(x))^{\mathfrak{M}}$ es el ínfimo en $[0,1]$ del conjunto $\{\phi(a)^{\mathcal{M}}|a \in M\}$*

Definición 2.5.2 *Dada una $L(M)$-fórmula $\phi(x_1,\cdots,x_n)$, denotamos por $\phi^{\mathfrak{M}}$ la función de M^n a $[0,1]$, definida por*

$$\phi^{\mathfrak{M}}(a_1,\cdots,a_n) = (\phi(a_1,\cdots,a_n))^{\mathfrak{M}}$$

Teorema 2.5.1 *Sea $t(x_1,\cdots,x_n)$ un L-término y ϕ una L-fórmula. Entonces existen funciones Δ_t y Δ_ϕ de $(0,1]$ a $(0,1]$ tal que para toda L-pre-estructura M, Δ_t es un modulo de continuidad uniforme para la función $t^{\mathfrak{M}} : M^n \to M$ y Δ_ϕ es un modulo de continuidad uniforme para el predicado $\phi^{\mathfrak{M}} : M^n \to [0,1]$.*
Demostración*: Consideremos el caso en que φ es un símbolo de función n-ario, como $\varphi^{\mathfrak{M}}$ es una composición finita de funciones uniformemente continuas, el teorema 2.2.1 muestra que $\varphi^{\mathfrak{M}}$ es uniformemente continua, y por tanto existe Δ_φ modulo de continuidad uniforme.* $\square$

Definición 2.5.3 *Dos $L-$fórmulas $\varphi(x_1,\cdots,x_n)$ y $\varphi_1(x_1,\cdots,x_n)$ son llamadas equivalente lógicamente si*

$$\varphi^{\mathfrak{M}}(a_1,\cdots,a_n) = \varphi_1^{\mathfrak{M}}(a_1,\cdots,a_n)$$

para todo $L-$estructura $\mathfrak{M}$ y todo $a_1,\cdots,a_n \in M$.

Si $\varphi(x_1,\cdots,x_n)$ y $\varphi_1(x_1,\cdots,x_n)$ son $L-$fórmulas, podemos extender la definición anterior a la distancia lógica entre las dos fórmulas φ y φ_1, esto es, el supremo de todos los números

$$|\varphi^{\mathfrak{M}}(a_1,\cdots,a_n) - \varphi_1^{\mathfrak{M}}(a_1,\cdots,a_n)|$$

donde $a_1,\cdots,a_n \in M$. Esto define una seudométrica sobre el conjunto de todas las fórmulas con variables libres $x_1,\cdots,x_n$, y dos fórmulas son lógicamente equivalentes si y solo si la distancia lógica entre ambas fórmulas es cero.
Observación: Hemos permitido que cada función continua de $[0,1]^n$ en $[0,1]$ sea un conectivo. El teorema de Wierstrass establece un conjunto de funciones continuas contables de $[0,1]^n$ en $[0,1]$ que es denso en el conjunto de todas las funciones continuas con respecto a la distancia sup definida arriba, es decir, dadas f, g funciones acotadas con un dominio común D, su distancia *sup* es $\sup_D\{|f(x)-g(x)|\}$. Si solo usamos tales conectivos en la construcción de $L-$fórmulas, entonces

- el numero total de fórmulas que son construidas es $card(L)$
- todas las $L-$fórmulas pueden estar tan cerca con la distancia lógica a una fórmula construida usando los conectivos restringidos.

2.5.1. Condiciones de L

Una $L-$condición E es una expresión formal $\varphi = 0$, donde φ es una $L-$fórmula. Se dice que E es cerrada si la fórmula no tiene variables libres, es decir, si φ es una sentencia. Se escribe $E(x_1, \cdots, x_n)$, donde $x_1, \cdots, x_n$ son variables distintas, para indicar que las variables libres de la fórmula que define la condición tiene sus variables en $x_1, \cdots, x_n$. Si E es una $L(M)-$condición $\varphi(x_1, \cdots, x_n; a) = 0$ y existen $a_1, \cdots, a_n \in M$ tal que $\varphi^{\mathfrak{M}}(a_1, \cdots, a_n; a) = 0$, decimos que E es verdad en M y lo denotaremos por $\mathfrak{M} \models E[a_1 \cdots, a_n]$.

Definición 2.5.4 *Sean E_1, E_2 $L-$condiciones. Decimos que son lógicamente equivalentes si para toda $L-$estructura $\mathfrak{M}$ y todas $a_1 \cdots, a_n \in M$ se tiene*

$$\mathfrak{M} \models E_1[a_1, \cdots, a_n]; \;\; \mathfrak{M} \models E_2[a_1, \cdots, a_n]$$

Observación: Cuando φ, ψ son fórmulas, se incluirá a $\varphi = \psi$ como una expresión para la condición $|\varphi - \psi| = 0$. También tiene sentido expresiones de la forma $\varphi = r$ donde $r \in [0,1]$, se puede ver a r como la función constante. Por otro lado, dado una $L-$estructura $\mathfrak{M}$ y $a \in M$, entonces $|\varphi - \psi|^{\mathfrak{M}}(a) = 0$ si y solo si $\varphi^{\mathfrak{M}}(a) = \psi^{\mathfrak{M}}(a)$. Por lo tanto, la interpretación de $\varphi = \psi$ es semanticamente correcta.
Definimos la siguiente función $\dot{-} : [0,1]^2 \to [0,1]$, el conectivo definido por $\dot{-}(t_1, t_2) = max\{t_1 - t_2, 0\}$. Se denota $\dot{-}(t_1, t_2)$ por $(t_1 \dot{-} t_2)$ y $\varphi \leq \psi$ y $\varphi \geq \psi$, como abreviaciones de la condición $\varphi \dot{-} \psi = 0$

2.6. Conceptos modelo teóricos

En esta sección se definirá los elementos fundamentales de la teoría de modelos y veremos algunos resultados

Definición 2.6.1 *Una $L-$ teoría T es un conjunto de $L-$condiciones cerradas. Si existe un $L-$ modelo $\mathfrak{M}$ tal que para toda $L-$condición $E \in T$ se tiene que $\mathfrak{M} \models E$, entonces diremos que $\mathfrak{M}$ es un modelo de T, y lo denotaremos por $\mathfrak{M} \models T$. Por otro, $Mod_L(T)$ denotara la clase de todos los modelos de T.*
Dado un $L-$modelo $\mathfrak{M}$, denotamos por $Th_L(\mathfrak{M})$, el conjunto de todos las condiciones E cerradas que son verdad en $\mathfrak{M}$. Se dice que una teoría T es completa si existe un $L-$modelo $\mathfrak{M}$ tal que $T = Th(\mathfrak{M})$.
Dada una $L-$teoría T, decimos que una $L-$ condición E cerrada es consecuencia lógica de T, si para todo modelo $\mathfrak{M}$ de T se tiene que $\mathfrak{M} \models E$.

Definición 2.6.2 *Supongamos que $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{N}$ son $L-$estructuras.*

1. *Decimos que $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{N}$ son elementalmente equivalentes, si para todo $L-$sentencia cerrada σ se tiene que $\sigma^{\mathfrak{M}} = \sigma^{\mathfrak{N}}$. Este hecho lo denotamos por $M \equiv N$. Es equivalente a que $Th_L(\mathfrak{M}) = Th_L(\mathfrak{N})$.*

2. *Si $M \subseteq N$ se dice que $\mathfrak{M}$ es una sub-estructura elemental de $\mathfrak{N}$, y lo detonamos por $M \preceq N$, si siempre que $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ es una $L-$estructura y $a_1, \cdots, a_n$ son elementos de M, se tiene*
$$\varphi^{\mathfrak{M}}(a_1, \cdots, a_n) = \varphi^{\mathfrak{N}}(a_1, \cdots, a_n)$$

   Se dice también que $\mathfrak{N}$ es una extensión elemental de $\mathfrak{M}$.

3. *Una función $F : A \subseteq M \to N$ es elemental, si siempre que $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ es una $L-$fórmula y $a_1, \cdots, a_n \in A$, se tiene*
$$\varphi^{\mathfrak{M}}(a_1, \cdots, a_n) = \varphi^{\mathfrak{N}}(F(a_1), \cdots, F(a_n)).$$

4. *Una inmersión elemental de $\mathfrak{M}$ en $\mathfrak{N}$, es una función de M en N que es elemental.*

Observación: Toda función elemental de una estructura métrica en otra preserva la distancia, es decir, es una isometría.
La colección de todas las funciones elementales es cerrado para composición y formación de inversos.
Todo isomorfismo entre estructuras métricas es un inmersión elemental.
Por la observación que sigue a la definición 2.5.3, existe un conjunto $\mathcal{S}$ de $L-$fórmulas que es denso con respecto a la distancia del sup. Es decir, tal conjunto tiene la siguiente propiedad: para toda $L-$fórmula $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ y $\epsilon > 0$ existe $\psi(x_1, \cdots, x_n) \in \mathcal{S}$ tal que toda $L-$estructuras $\mathfrak{M}$ y todo $a_1, \cdots, a_n \in M$, se tiene $|\varphi^{\mathfrak{M}}(a_1, \cdots, a_n) - \psi^{\mathfrak{M}}(a_1, \cdots, a_n)| \leq \epsilon$.

2.6.1. Lema de Tarski-Vaught

Teorema 2.6.1 *Test de Tarski-Vaught. Sea $\mathcal{S}$ un conjunto de $L-$fórmulas que es denso en el conjunto de todas las $L-$fórmulas con respecto a la distancia sup (distancia lógica), garantizado por la observación de antes. Supongamos que $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ son $L-$estructuras con $M \subseteq N$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$M \preceq N$;*

2. *para toda $L-$fórmula $\varphi(x_1, \cdots, x_n, y) \in S$ y $a_1, \cdots, a_n \in M$,*
$$inf\{\varphi^{\mathfrak{N}}(a_1, \cdots, a_n, b)|b \in N\} = inf\{\varphi^{\mathfrak{N}}(a_1, \cdots, a_n, c)|c \in M\}$$

Demostración: Supongamos (1), para una $L-$fórmula $\varphi(x_1, \cdots, x_n, y)$ y $a_1, \cdots, a_n \in M$, se tiene siempre que $\varphi^{\mathfrak{M}}(a_1, \cdots, a_n, c) = \varphi^{\mathfrak{N}}(a_1, \cdots, a_n, c)$, para cada $c \in M$ que verifica la parte izquierda de la igualdad. Por tanto $\{\varphi^{\mathfrak{N}}(a_1, \cdots, a_n, c|c \in M)\} \supseteq \{\varphi^{\mathfrak{M}}(a_1, \cdots, a_n, c)|c \in M\}$, por tanto
$$\begin{aligned} inf\{\varphi^{\mathfrak{N}}(a_1, \cdots, a_n, c|\, c \in N)\} &\leq inf\{\varphi^{\mathfrak{M}}(a_1, \cdots, a_n, c)|\, c \in M\} \\ &\leq inf\{\varphi^{\mathfrak{N}}(a_1, \cdots, a_n, c|\, c \in M)\} \\ &\leq inf\{\varphi^{\mathfrak{N}}(a_1, \cdots, a_n, c|c \in N)\} \end{aligned}$$

de esta forma se obtiene el resultado (2). Supongamos ahora (2), se tiene para un conjunto de $L-$fórmulas denso en el conjunto de todas las fórmulas con respecto a la distancia lógica. Se mostrara primera que la condición (2) se da para el conjunto de todas las $L-$fórmulas. Consideremos por tanto una $L-$fórmula $\varphi(x_1, \cdots, x_n, y)$. Dado $\epsilon > 0$, sea $\psi(x_1, \cdots, x_n, y) \in \mathcal{S}$ la cual aproxima a $\varphi(x_1, \cdots, x_n, y)$, tomando $a_1, \cdots, a_n \in M$, tenemos

$$\begin{aligned} inf\{\varphi^{\mathfrak{N}}(a_1, \cdots, a_n, b) | \, b \in M\} &\leq inf\{\psi^{\mathfrak{N}}(a_1, \cdots, a_n, b) | \, b \in M)\} + \epsilon \\ &= inf\{\psi^{\mathfrak{N}}(a_1, \cdots, a_n, c) | \, c \in N\} + \epsilon \\ &\leq inf\{\varphi^{\mathfrak{N}}(a_1, \cdots, a_n, c) | \, c \in N\} + 2\epsilon \end{aligned}$$

Como el resultado anterior se verifica para todo $\epsilon > 0$, concluimos lo que se deseaba para $\varphi(x_1, \cdots, x_n, y)$. Podemos por tanto asumir que la condición (2) se da para toda $L-$fórmula. Vamos hacer inducción sobre la complejidad de las $L-$fórmulas. El resultado es claro para constantes. Supongamos que $\varphi(t_1, \cdots, t_m)$ es un predicado (o una función) con $t_1, \cdots, t_m$ términos, entonces se tiene para $a_1, \cdots, a_n \in M$

$$\begin{aligned} \varphi^{\mathfrak{M}}(t_1, \cdots, t_m)(a_1, \cdots, a_n) &= \varphi(t_1^{\mathfrak{M}}, \cdots, t_m^{\mathfrak{M}})(a_1, \cdots, a_n) \\ &= \varphi(t_1^{\mathfrak{N}}, \cdots, t_m^{\mathfrak{N}})(a_1, \cdots, a_n) \\ &= \varphi^{\mathfrak{N}}(t_1, \cdots, t_m)(a_1, \cdots, a_n) \end{aligned}$$

Donde la segunda igualdad es validad por la hipótesis de inducción, y la última igualdad es la definición. Basta por tanto demostrar para el caso de la fórmula $inf_y \varphi(x_1, \cdots, x_n, y)$ donde $\varphi(x_1, \cdots, x_n, y)$ es libre de cuantificadores. Sean $a_1, \cdots, a_n \in M$, tenemos entonces

$$\begin{aligned} (inf_y \varphi(x_1, \cdots, x_n, y))^{\mathfrak{M}}(a_1, \cdots, a_n) &= inf\{\varphi^{\mathfrak{M}}(a_1, \cdots, a_n) | \;\, y \in M\} \\ &= inf\{\varphi^{\mathfrak{N}}(a_1, \cdots, a_n) | \;\, y \in M\} \\ &= inf\{\varphi^{\mathfrak{N}}(a_1, \cdots, a_n) | \;\, y \in N\} \\ &= (inf_y \varphi(x_1, \cdots, x_n, y))^{\mathfrak{N}}(a_1, \cdots, a_n). \end{aligned}$$

Donde la primera igualdad se tiene por definición, la segunda por la hipótesis inductiva, la tercera por la condición 2 extendida al conjunto de todas las $L-$fórmulas y, finalmente, la última igualdad se tiene por definición. $\square$

2.7. Ultraproductos en espacios métricos

Sea $((M_i, d_i) | i \in I)$ una familia de espacios métricos acotados, todos con un diámetro $\leq K$. Sea D un ultrafiltro sobre I. Definimos una función d sobre el producto cartesiano $\prod_{i \in I} M_i$ de la siguiente forma

$$d(x, y) = \lim_{i,D} \; d_i(x_i, y_i)$$

donde $\lim_{i,D} d_i(x_i, y_i) = a$ ("$a$es el D-límite de $(x_i)_{i\in I}$") si para cada vecindad U de a, el conjunto $\{i \in I | x_i \in U\} \in D$; y donde $x = (x_i)_{i\in I}$, $y = (y_i)_{i\in I}$, este D-límite es tomado en el intervalo $[0, K]$.
Observemos que si $\lim_{i,D} d_i(x_i, y_i) = a$, entonces para cada U_a vecindad abierta de a, existe $A \in D$ tal que $x_i \in U_a$ siempre que $i \in A$. Así que por cada vecindad abierta U de a encontramos un conjunto de indices A_U, en el cual la convergencia es la convergencia usual en $\mathbb{R}$. Si tomamos $\cup_{U_a} A_U = I_1 \in D$, resulta que la convergencia es la usual en $(d_i(x_i, y_i))_{i\in I_1} \subset (d_i(x_i, y_i))_{i\in I}$. Si suponemos que existe $(z_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i$ tal que $\lim_{i,D} d_i(x_i, y_i) > \lim_{i,D} d_i(x_i, z_i) + \lim_{i,D} d_i(z_i, y_i)$, por lo dicho antes, resultan conjunto de indices I_1, I_2, I_3 tales que la convergencia de $(d_i(x_i, y_i))_{i\in I_1}$,$(d_i(x_i, z_i))_{i\in I_2}$ y $(d_i(z_i, y_i))_{i\in I_3}$ es la usual en $\mathbb{R}$. Por lo que no puede ser que existe un elemento en común entre los indices I_1, I_2, I_3, puesto que d_i respeta la desigualdad triangular para cada indice. Así que $I_1 \cap I_2 \cap I_3 = \phi \in D$, lo cual muestra que $D = \mathcal{P}(I)$. Por tanto hemos demostrado que d resulta ser una seudométrica sobre $\prod_{i\in I} M_i$.
Definamos ahora la siguiente relación, para $x, y \in \prod_{i\in I} M_i$, $x \sim_D y$ si y solo si $d(x, y) = 0$. Resulta que la relación es de equivalencia. Así podemos determinar el espacio cociente

$$(\prod_{i\in I} M_i)_D := (\prod_{i\in I} M_i)/\sim_D$$

La seudométrica d sobre $\prod_{i\in I} M_i$ induce una métrica sobre el espacio cociente. Denotamos esta métrica con d. [4]
El espacio $(\prod_{i\in I} M_i)_D$ con la métrica inducia d es llamado el D-ultraproducto de $((M_i, d_i)|i \in I)$. Por comodidad de notación denotaremos la clase de equivalencia de un elemento $(x_i)_{i\in I}$ por $((x_i)_{i\in I})_D$.
Si $(M_i, d_i) = (M, d)$ para todo $i \in I$, el espacio $(\prod_{i\in I} M_i)_D$ es llamado ultrapotencia de M y se denota por $(M)_D$.

Como un caso particular consideremos la D-ultrapotencia de un espacio métrico compacto (M, d). La inmersión $T(x) : (M, d) \to (M)_d$ que asigna a cada elemento de M en su diagonal, esto es, a cada x lo envía en $T(x) = (x_i)_{i\in I}$ tal que $x = x_i$ para todo $i \in I$, es sobreyectiva . En efecto, por ser el espacio (M, d) de Hausdorff y compacto entonces toda familia $(x_i)_{i\in I} \in M$ y todo ultraproducto D sobre I, el $D-$límite existe y es único así que existe x el D-límite de $(x_i)_{i\in I}$, por tanto$T(x) = ((x_i)_{i\in I})_D$. Así que, todo ultraproducto de un intervalo cerrado acotado puede ser canónicamente identificado con el intervalo mismo.

Teorema 2.7.1 *Sea $((M_i, d_i)|i \in I)$ un familia de espacios métricos completos acotados todos con diámetros $\leq K$. Dado un ultrafiltro D sobre I consideremos (M, d) el D-ultraproducto de $((M_i, d_i)|i \in I)$. Entonces el espacio métrico (M, d) es completo*

Demostración: Consideremos $(x^k)_{k\geq 1}$ una sucesión de Cauchy en (M, d). Dado $\frac{1}{2^k} = \epsilon(k)$, existe $N(\epsilon(k)) \in \mathbb{N}$ tal que para cada $m, n \geq N(k)$, se tiene que $d(x^m, x^n) \leq \epsilon(k)$, tómese

$s(k)$ número natural que cumplan con la siguiente condición $s(k) > max\{N(k), N(k+1)\}$. Así encontramos una sub-sucesión $(x^{s(k)})_{k\geq 1} \subset (x^k)_{k\geq 1}$, tal que $d(x^k, x^{k+1}) \leq 2^{-k}$ para todo $k \geq 1$. Veremos que $(x^{s(k)})_{k\geq 1}$ converge en (M, d) y por tanto lo hace la sucesión.
Para cada $k \geq 1$ los elementos x^k tiene una representación de la forma $(x_i^k)_{i\in I}$; por tanto para cada $k \geq 1$ si $d(x^k, x^{k+1}) < 2^{-k}$ implica que existe $A_k \in D$ tal que $d(x_i^k, x_i^{k+1}) < 2^{-k}$ para todo $i \in A_k$. Para cada $m \geq 1$, $A(m) = \bigcap_{k\leq m} A_k \neq \phi$. Construiremos un elemento $(y_i)_{i\in I} \in (\prod_{i\in I} M_i)_D$ que sea punto de convergencia. Si $i \notin A(1)$,tómese cualquier y_i elemento arbitrario de M_i. Ahora bien, en caso en que $i \in A(1)$, se tiene que o bien $i \in A(m)$ para todo $m \geq 1$ o que para alguna m, $i \in A(m)/A(m+1)$. Si para alguna $m \geq 1$ se tiene que $A(m)/A(m+1)$, definimos $y_i := x_i^{m+1}$. Si $i \in A(m)$ para todo $m \geq 1$, entonces $(x_i^m)_{m\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en el espacio métrico completo (M_i, d_i) y definimos a y_i como su límite. Bajo estas condiciones se tiene que para $m \geq 1$ y cada $i \in A(m)$ tenemos $d_i(x_i^m, y_i) \leq 2^{-m+1}$. Se tiene por tanto que la sucesión construida $((y_i)_{i\in I})_D$ es el límite en el ultraproducto $(M, d)_D$. $\square$

2.7.1. Ultraproductos de funciones

Supongamos $((M_i, d_i)|i \in I)$ y $((M_i', d_i')|i \in I)$ son familia de espacios métricos, todas con diámetro $\leq K$. Dado un $n \geq 1$ y supongamos que $f_i : M_i^n \to M_i'$ es uniformemente continua para cada $i \in I$. Consideremos para cada $i \in I$ las funciones f_i, con el mismo modulo de continuidad uniforme $\Delta : (0, 1] \to (0, 1]$. Dado un ultrafiltro D sobre I, definimos la siguiente función

$$(\prod_{i\in I} f_i)_D : (\prod_{i\in I} M_i)_D^n \to (\prod_{i\in I} M_i')_D$$

como sigue.

$$(\prod_{i\in I} f_i)_D(((x_i^1)_{i\in I})_D, \cdots, ((x_i^n)_{i\in I})_D) = (f_i(x_i^1, \cdots, x_i^n))_D.$$

Veamos que dicha función esta bien definida. Por simplicidad en la notación consideremos el caso en que $n = 1$, y sean $x = ((x_i)_{i\in I})$ y $y = ((y_i)_{i\in I})$ elementos en el ultraproducto $(\prod_{i\in I} M_i)_D$ tal que $d(x, y) \leq \Delta(\epsilon)$, entonces existe un $A \in D$ tal que para todo $i \in A$ se tiene que $d_i(x_i, y_i) \leq \Delta(\epsilon)$, por ser cada f_i uniformemente continua con modulo de continuidad Δ, se ve que para todo $i \in A$ se tiene que $d_i'(f(x_i), f(y_i)) < \epsilon$, así que la distancia en $(\prod_{i\in I} M_i')_D$ entre $f(x) = ((f_i(x_i))_{i\in I})_D$ a $f(y) = ((f_i(y_i))_{i\in I})_D$ es menor que ϵ. Acabamos de mostrar que la función esta bien definida y que Δ es un modulo de continuidad uniforme para el producto.

2.7.2. Ultraproductos de L-estructuras

Sea $(\mathfrak{M}_i|i \in I)$ una familia de L-estructuras y sea D un ultrafiltro sobre I. Consideremos el espacio subyacente a cada $\mathfrak{M}_i$ el espacio métrico (M_i, d_i); ahora vamos a definir una nueva L-estructura, la cual tiene como universo a $(\prod_{i\in I} M_i)_D$. Vamos a exigir sobre cada L-estructura

M_i que para cada símbolo de función $f \in L$ de aridad n sea de tal forma que las funciones $f^{\mathfrak{M}_i}$ tengan como modulo de continuidad uniforme una misma función Δ, de forma que el D-ultraproducto de funciones se tenga. Procedemos de la misma forma para los símbolos de predicados $P \in L$. Consideremos un símbolo de predicado $P \in L$, para cada L-estructura M_i, $P^{\mathfrak{M}_i}$ define una función uniformemente continua en $[0,1]$, entonces su D-ultraproducto define una función uniformemente continua en $([0,1]^I)_D$, pero por la observación hecha al final de la sección 2.7 se puede identificar con $[0,1]$. Por tanto el D-ultraproducto de las $(P^{\mathfrak{M}_i}|i \in I)$ define un forma de interpretar cada P símbolo de predicado. Supongamos que cada L-estructura con espacio métrico (M_i, d_i) tiene todos sus módulos de continuidad uniformes iguales, lo mismo para el caso de los símbolos de relación, definimos la siguiente L-estructura sobre el D -ultraproducto (M, D).
Para cada símbolo de predicado P de L, la interpretación de P en $\mathfrak{M}$ es la dada por el ultraproducto de las funciones

$$P^{\mathfrak{M}} = (\prod_{i\in I} P^{\mathfrak{M}_i})_D$$

el cual es una función de M^n en $[0,1]$. Para cada símbolo de función f de L, la interpretación de f en $\mathcal{M}$ es la dada por el ultraproducto de sus funciones

$$f^{\mathfrak{M}} = (\prod_{i\in I} f^{\mathfrak{M}_i})_D$$

que es una función de M^n en M. Para cada símbolo de constante c, la interpretación de c en $\mathfrak{M}$ es

$$c^{\mathfrak{M}} = ((c^{\mathfrak{M}_i})_{i\in I})_D$$

Llamaremos a la L-estructura construida, la L-estructura del D-ultraproducto de la familia $(M_i|i \in I)$

Teorema 2.7.2 ***Teorema fundamental del ultraproducto:*** *Sea $(\mathfrak{M}_i|i \in I)$ una familia de L-estructuras. Sean D cualquier ultrafiltro sobre I y $\mathfrak{M}$ el D-ultraproducto de $(\mathfrak{M}_i|i \in I)$. Sea $\phi(x_1, \cdots, x_n)$ una L-fórmula. Si $a_k = ((a_i^k)_{i\in I})_D$ elementos de M, para $k = 1, \cdots, n$, entonces*

$$\phi^{\mathfrak{M}}(a_1, \cdots, a_n) = \lim_{i,D} \ \phi^{\mathfrak{M}_i}(a_i^1, \cdots, a_i^n)$$

Demostración Hacemos inducción sobre la complejidad de la fórmula ϕ . Considerando el caso en que $n = 1$. Supongamos el caso en que ϕ sea un símbolo de función f, entonces $f^{\mathfrak{M}}(a) = \prod_{i\in I} f^{\mathfrak{M}_i}(a_i) = ((f^{\mathfrak{M}_i}(a_i))_{i\in I})_D$. Veamos el caso para símbolos de relación. Consideremos ϕ el símbolo de relación P y sea t un símbolo de término que satisfaga el teorema.

$$P^{\mathfrak{M}}(t) = \prod_{i\in I} P^{\mathfrak{M}_i}(t) = ((P^{\mathfrak{M}_i}(t))_{i\in I})_D = ((P^{\mathfrak{M}_i}(t^{\mathfrak{M}_i}))_{i\in I})_D$$

Observemos primero que $(P^{\mathfrak{M}_i}(t^{\mathfrak{M}_i}))$ resulta ser una función uniformemente continua. Por la observación hecha al final de 2.7, podemos identificar $((P^{\mathfrak{M}_i}(t^{\mathfrak{M}_i}))_{i\in I})_D \in [0,1]^I$ como un elemento de $[0,1]$, por tanto $(P^{\mathfrak{M}_i}(t^{\mathfrak{M}_i}))_{i\in I} = r$ es un elemento en $[0,1]$. Más aún, existe $A \in U$ tal que para todo $i \in A$, $(P^{\mathcal{M}_i}(t^{\mathcal{M}_i}))_{i\in I} = r$. Lo cual significa que $r = \lim\limits_{i,D}(P^{\mathcal{M}_i}(t))$. Consideremos el caso en que ϕ sea de la forma $\underset{y}{sup}\ \varphi$ donde φ es un L-fórmula libre de cuantificadores. Supongamos que φ cumple las condiciones del teorema,

$$(\underset{y}{sup}\ \varphi)^{\mathfrak{M}} = (\prod_{i\in I}\underset{y}{sup}\ \varphi^{\mathfrak{M}_i})_D$$

Ahora vamos a utilizar el siguiente hecho:

Hecho 2.7.1 *Supongamos que M, M' son espacios métricos y f una función uniformemente continua acotada de $M \times M'$ en $\mathbb{R}$. Sea Δ módulo de continuidad uniforme para f. Entonces $\underset{y}{inf}\ f$ y $\underset{y}{sup}\ f$ son funciones uniformemente continua de M en $\mathbb{R}$ con modulo de continuidad Δ para ambos casos.*

Por lo que resulta que $sup\, \varphi^{\mathfrak{M}_i}$ es una función uniformemente continua. Como φ satisface las condiciones del teorema, entonces existe $A \in D$ tal que para todo $i \in A$ (junto con la condición de ser uniformemente continua) se tiene que

$$(\prod_{i\in I}\underset{y}{sup}\ \varphi^{\mathfrak{M}_i})_D = ((sup\, \varphi^{\mathfrak{M}_i})_{i\in I})_D$$

□

Corolario 2.7.1

Si $\mathfrak{M}$ es una L-estructuras y $T : M \to (M)_D$ es la inmersión diagonal. Entonces T es una inmersión elemental de M sobre $(M)_D$

Corolario 2.7.2 *Si $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ son L-estructuras y tienen ultrapotencias isomorfas, entonces $M \equiv N$.*

Teorema 2.7.3 *Si $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ son L-estructuras y $M \equiv N$ entonces existen un ultrafiltro D tal que $(M)_D$ es isomorfo a $(N)_D$. [2, 9]*

2.7.3. Teorema de compacidad versión ultraproductos

Teorema 2.7.4 ***(Teorema de compacidad versión ultraproductos)*** *Sea T una L-estructura y $\mathcal{C}$ una clase de L-estructuras. Si T es finitamente satisfactible en $\mathcal{C}$. Entonces existe un ultraproducto de estructuras de $\mathcal{C}$ que es modelo de T.*

Demostración: Sea Λ el conjunto de subconjuntos finitos de T . Sea $\lambda \in \Lambda$, así $\lambda = \{E_1, \cdots, E_n\}$. Por hipótesis existe una L-estructura $\mathfrak{M}_\lambda$ en $\mathcal{C}$ tal que $\mathfrak{M}_\lambda \models E_j$ para todo $j = 1, 2, \cdots, n$. Para cada $E \in T$, sea $S(E)$ el conjunto de todos los $\lambda \in \Lambda$ tal que $E \in \lambda$. Dado $E, E' \in T$

$$S(E) \cap S(E') = \{\lambda \in \Lambda : E, E' \in \lambda\}$$

por lo que $\{S(E) : E \in T\}$ tiene la propiedad de la intersección finita. Por tanto existe un ultrafiltro D de Λ. Consideremos

$$M = \left(\prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda\right)_D$$

Note que si $\lambda \in S(E)$, entonces $\mathfrak{M}_\lambda \models E$. Se sigue del teorema que 2.7.2 que $\mathfrak{M} \models E$ para cada $E \in T$. En otras palabras, el $D-$ultraproducto M de estructuras de $\mathcal{C}$ es un modelo de T. $\square$

Definición 2.7.1 *Para cualquier conjunto Σ de L-condiciones, Σ^+ es el conjunto de todas las condiciones $\varphi \leq \frac{1}{n}$ tal que $\varphi = 0$ es un elemento de Σ y $n \geq 1$.*

Corolario 2.7.3 *Sea T una L teoría y $\Sigma(x_j|j \in J)$ un conjunto de L-condiciones, y asumimos que Σ^+ es consistente con T. Entonces existe un modelo $\mathfrak{M}$ de T y elementos $(a_j|j \in J)$ de M tal que*

$$\mathfrak{M} \models E[a_j|j \in J]$$

para cualquier $L-$condición $E \in \Sigma$.

Demostración: Sea $(c_j|j \in J)$ un nuevo conjunto de constantes distintas de las de L , considere el lenguaje $L(\{c_j|j \in J\})$. Utilizando el teorema de compacidad, el conjunto $T \cup \Sigma^+(c_j|j \in J)$ de condiciones cerradas en $L(\{c_j|j \in J\})$ es consistente. Además como Σ y Σ^+ tienen los mismos modelos, se sigue que $T \cup \Sigma$ es consistente. $\square$

2.8. Axiomatización de clases de estructuras

Definición 2.8.1 *Suponga que $\mathcal{C}$ es una clase de $L-$estructuras. Decimos que $\mathcal{C}$ es axiomatizable si existe un conjunto T de $L-$condiciones cerradas tal que $\mathcal{C} = Mod_L(T)$. Cuando esto sucede para T, decimos que T es un conjunto de axiomas para $\mathcal{C}$ en L.*

En la definición anterior $Mod_L(T)$ es el conjunto de todos las $L-$estructuras que son modelos de T.

Teorema 2.8.1 *Suponga que $\mathcal{C}$ es una clase de $L-$estructuras. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$\mathcal{C}$ es axiomatizable en L.*

2. *$\mathcal{C}$ es cerrado bajo isomorfismo, ultraproducto y complemento, lo último significa que* $\{\mathfrak{M}|\mathfrak{M}$ es una L-estructura que no esta en $\mathcal{C}\}$, *es cerrado bajo ultrapotencias.*

Demostración: $1 \Rightarrow 2$, es consecuencia del teorema fundamental del ultraproducto. $2 \Rightarrow 1$, consideremos el conjunto T de todas las $L-$condiciones que son satisfechas por cada estructura en $\mathcal{C}$. Queremos mostrar T es un conjunto de axiomas para $\mathcal{C}$. Supongamos $\mathfrak{M}$ es una $L-$estructura tal que $\mathfrak{M} \models T$. Veamos que que $Th(\mathfrak{M}^+)$ es finitamente satisfactible en $\mathcal{C}$. De no ser así, existen $L-$ sentencias $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ y $\epsilon > 0$ tal que $\sigma_j^{\mathfrak{M}} = 0$ para todo $j = 1, \cdots, n$, pero tal que para todo $\mathfrak{N} \in \mathcal{C}$ se tiene que $\sigma_j^{\mathfrak{N}} \geq \epsilon$ para $j = 1, \cdots, n$. Esto significa que la condición $max(\sigma_1, \cdots, \sigma_n) \geq \epsilon$ esta en T pero no se satisface en M, lo cual es una contradicción. Así que $Th(\mathfrak{M})^+$es finitamente satisfactible en $\mathcal{C}$. Por el teorema de compacidad existe un ultraproducto M' de estructuras de $\mathcal{C}$ tal que $\mathfrak{M}'$ es un modelo de $Th(\mathfrak{M})^+$. Así se obtiene que $M' = M$. Por el teorema 2.7.3, existe un ultrafiltro D tal que $(\mathcal{M}')_D$ y $(\mathcal{M})_D$ son isomorfos. Por la condición (2) implica que $(M')_D$ esta en M. $\square$

2.9. Teorema de Löwenheim-Skolem

El carácter de densidad de un espacio topológico es el menor cardinal de un subconjunto denso del espacio. Por ejemplo, un espacio es separable si y solo si su carácter de densidad es $\leq \aleph_0$. Se denota el carácter de densidad de un espacio topológico por $cd(A)$.

Teorema 2.9.1 *(*Descendente de Löwenhim-Skolem*) Sea κ un cardinal infinito y asuma que $|L| \leq \kappa$. Sea $\mathfrak{M}$ una $L-$estructura y suponga que $A \subset M$ tal que $cd(A) \leq \kappa$. Entonces existe una sub-estructura $\mathfrak{N}$ de $\mathfrak{M}$ tal que*

1. *$N \preceq M$;*

2. *$A \subset N \subset M$;*

3. *$cd(N) \leq \kappa$*

Demostración: *Sea A_0 un subconjunto denso de A de cardinal a lo sumo κ. Se añade a A_0, los $b \in M$ que se obtiene de la siguiente forma: para cada L-fórmula $\varphi(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1})$ y todo número racional $\epsilon > 0$, si $\varphi^{\mathcal{M}}(a_1, \cdots, a_n, c_{n+1}) < \epsilon$ con $a_k \in N_0$ para $k = 1, \cdots, n$ y $c \in M$, entonces existe $b \in N_0$ tal que $\varphi^{\mathcal{M}}(a_1, \cdots, a_n, b_{n+1}) < \epsilon$; esto es posible porque L tiene a lo sumo κ fórmulas restrictivas. Llamemos a $N_0 \supseteq A_0$ el conjunto obtiene al haber agregado todos los $b \in M$ testigos de cada una de las fórmulas (esto es, los que se consiguieron por lo dicho antes). Así se obtiene $A_0 \subset N_0 \subset M$ y $card(N_0) \leq \kappa$. Sea N la clausura de N_0 en M. La continuidad de fórmulas y la densidad uniforme de las fórmulas restringidas prueba que $N \subseteq M$ satisface el test de Tarski-Vaught y por tanto $N \preceq M$.* $\square$

2.10. Estructuras saturadas

Definición 2.10.1 *Sean M una $L-$estructura y κ un cardinal infinito. Decimos que M es $\kappa-$saturado si siempre que $A \subseteq M$ con cardinalidad $\leq \kappa$ satisface que: para todo $\Gamma(x_1, \cdots, x_n)$ conjunto de $L(A)$ condiciones si es finitamente satisfactible en $(\mathfrak{M}, a)_{a\in A}$, entonces el conjunto completo Γ es satisfactible $(\mathfrak{M}, a)_{a\in A}$.*

Un ultrafiltro D es contable incompleto si D no es cerrado bajo intersecciones contables. Esto es equivalente a la existencia de $J_n \in D$ con $n < \omega$ tal que $\bigcap\limits_{n<\omega} J_n = \phi$.

Teorema 2.10.1 *Sea L un lenguaje con $card(L) = \omega$ y sea D un ultrafiltro contable incompleto sobre el conjunto Λ. Entonces para todo familia $(M_\lambda|\lambda \in \Lambda)$ de $L-$estructuras, $(\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda)_D$ es ω_1-saturado.*

Demostración: Lo que tenemos que mostrar es que $(\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda)_D$ satisface la definición 2.10.1, basta para ello considerar el caso $n = 1$. Tendremos que verificar la siguiente afirmación: Si $A \subset (\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda)_D = M$ es un conjunto contable y $\Gamma(x)$ es un conjunto de $L(A)-$fórmulas tal que todo subconjunto finito de $\Gamma(x)$ es satisfactible en $S = ((\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{M}_\lambda)_D, a)_{a\in A}$. Entonces el conjunto entero $\Gamma(x)$ es también satisfactible en S.
Para cada $a \in A$, sea $u(a) = (u_\lambda(a)|\lambda \in \Lambda) \in \prod\limits_{\lambda\in\lambda} M_\lambda$, donde $a = ((u_\lambda(a))_{\lambda\in\Lambda})_D$. Observe que

$$((\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda)_D, a)_{a\in A} = (\prod_{\lambda\in\Lambda} (M_\lambda, u_\lambda(a))_{a\in A})_D.$$

por tanto, como L es un lenguaje contable arbitrario y A es también contable, es suficiente probar la siguiente afirmación: Si $\Gamma(x)$ es un conjunto de $L-$condiciones y para todo subconjunto finito de $\Gamma(x)$ satisfactible en M, entonces $\Gamma(x)$ es satisfactible en M. Supongamos por tanto que $\Gamma(x)$ es finitamente satisfactible en M. Escribamos $\Gamma(x) = \{\varphi_n(x) = 0|n < \omega\}$, por otro lado como D es contable incompleto, podemos elegir una cadena descendente de elementos de D, $\Lambda = \Lambda_0 \supseteq \Lambda_1 \supseteq \cdots$, tal que $\bigcap\limits_{k<\omega} \Lambda_k = \phi$. Definimos inductivamente los siguientes conjuntos: $X_0 = \Lambda$ y para cada $k > 0$

$$X_k = \Lambda_k \cap \{\lambda \in \Lambda|\mathfrak{M}_\lambda \models \underset{x}{inf} max(\varphi_1 \cdots, \varphi_k) \leq \tfrac{1}{k+1}\}$$

Como T es finitamente satisfactible en M, para cada $k > 0$ la función definida por $\underset{x}{inf} max(\varphi_1 \cdots, \varphi_k)$ tiene una colección de modelos M_λ, tales que $M_\lambda \models \underset{x}{inf} max(\varphi_1 \cdots, \varphi_k) = 0$ para todo $\lambda \in A \subseteq D$. Así tenemos que $A \subseteq \{\lambda \in \Lambda|\mathfrak{M}_\lambda \models \underset{x}{inf} max(\varphi_1 \cdots, \varphi_k) \leq \frac{1}{k+1}\} = B(k)$. Como $\Lambda_k, B(k) \in D$ y siendo D un filtro, se tiene que $\Lambda_k \cap B(k) \in D$. Hemos obtenido $X_k \supseteq X_{k+1}$ para $k \geq 0$ y $\bigcap\limits_{k\geq 0} = \phi$. Por tanto para cada $\lambda \in \Lambda$ existe el mayor entero positivo $k(\lambda)$ tal que $\lambda \in X_{k(\lambda)}$. Se definirá un elemento $a = (a(\lambda))_{\lambda\in\Lambda} \in M$ tal que $M \models \Gamma[(a_D)]$. Para cada $\lambda \in \Lambda$, si $k(\lambda) = 0$, tomamos como $a(\lambda)$ como cualquier elemento en M_λ; de otra forma , sea $a(\lambda)$ tal que

$$\mathfrak{M}_\lambda \models \{max(\varphi_1, \cdots, \varphi_{k(\lambda)}) \leq \frac{1}{k(\lambda)}\}[a(\lambda)]$$

Si $k < \omega$ y $\lambda \in X_k$, se tiene $k \leq K(\lambda)$, así que $\mathfrak{M}_\lambda \models (\varphi_k \leq \frac{1}{k(\lambda)})[a(\lambda)]$. Por el teorema 2.7.2 se concluye que $M \models \Gamma[(a_D)]$. $\square$

Definición 2.10.2 *Sean $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ $L-$estructuras. Decimos que N es una extensión de M si tiene la siguiente propiedad: siempre que $A \subseteq M$ y $\Gamma(x_1, \cdots, x_n)$ un conjunto de $L(A)-$condiciones finitamente satisfactible en $(\mathfrak{M}, a)_{a\in A}$, entonces el conjunto entero Γ es satisfactible en $\mathfrak{N}$*

Teorema 2.10.2 *Toda $L-$estructura tiene una extensión*

Demostración: Sea $\mathfrak{M}$ una $L-$estructura y sea J un conjunto tal que $|J| \geq car(L(M))$. Sean $I = {}^{<\omega}$J y D un ultrafiltro sobre I que contiene cada uno de los conjuntos $S_j = \{i \in I | j \in i\}$, para cada $j \in J$. Tal ultrafiltro existe, puesto que $\{i_1, \cdots, i_n\} \subseteq S_{j_n} \cap \cdots \cap S_{j_n}$, donde $i_s \in S_{j_s}$ para $s \in \{1, \cdots, n\}$. Sea N la $D-$ultrapotencia de M, considerada como una extensión elemental por medio de la inmersión diagonal. Veamos que N es una extensión de M. A tal fin, consideremos $A \subseteq M$ y $\Gamma(x_1, \cdots, x_n)$ conjunto de $L(A)-$condiciones tal que para todo subconjunto finito de Γ es satisfactible en $(\mathfrak{M}, a)_{a\in A}$. Sea $\alpha : J \to \Gamma$ una función sobreyectiva. Dado $i = \{j_1, \cdots, j_m\} \in I$, sea $(a_i^1, \cdots, a_i^n)$ una $n-$tupla de M que satisface el subconjunto finito $\{\alpha(j_1), \cdots, \alpha(j_m)\}$ de Γ. Para $k \in \{1, \cdots, n\}$, definimos $a_k = ((a_i^k)_{i\in I})_D$. El teorema 2.7.2 muestra que $(a_1, \cdots, a_n)$ satisface Γ en $(\mathfrak{N}, \mathfrak{a})_{a\in A}$. $\square$

Teorema 2.10.3 *Sea $\mathfrak{M}$ una $L-$estructura. Para todo cardinal infinito κ , $\mathfrak{M}$ tiene una extensión $\kappa-$saturada*

Demostración: Construimos una cadena elemental $(M_\alpha : \alpha < \kappa^+)$ tal que $M_0 = M$ y para cada $\alpha < \kappa^+$, $M_{\alpha+1}$ es una extensión de M_α. En el caso límite tomamos las unión. Sea N la unión de la cadena, esto es, $N = \bigcup_{\alpha<\kappa^+} M_\alpha$. Es un ejercicio ver que $M_\alpha \preceq N$ para todo $\alpha < \kappa^+$. Por tanto $M \preceq N$. Veamos que N es $k-$saturado. Sea $A \subseteq N$ tal que $|A| < \kappa$. Existe por tanto $\alpha < \kappa^+$ tal que A es un subconjunto de M_α, por tanto la condición la verifica $M_{\alpha+1}$. $\square$

2.11. Estructuras fuertemente homogéneas

Definición 2.11.1 *Sea $\mathfrak{M}$ una $L-$estructura y κ un cardinal infinito. Decimos que $\mathfrak{M}$ es fuertemente $\kappa-$homogéneo si se satisface que : Siempre que $L(C)$ es una extensión de L por constantes con $|A| < \kappa$ y f, g son funciones de C en M tal que*

$$(M, f(c))_{c\in C} \equiv (M, g(c))_{c\in C}$$

se tiene que

$$(M, f(c))_{c\in C} \cong (M, g(c))_{c\in C}$$

Teorema 2.11.1 *Sea $\mathfrak{M}$ una $L-$estructura. Para cada cardinal infinito κ, existe $\mathfrak{N}$ extensión elemental fuertemente $\kappa-$homogénea*

Demostración: Se construirá una cadena elemental $(M_\alpha : \alpha < \kappa^+)$ y veremos que la unión de la cadena tiene las condiciones deseadas. Comenzando con $M_0 = M$, para cada $\alpha < \kappa$, $M_{\alpha+1}$ es una extensión elemental de M_α que es $\tau_\alpha-$saturado, con $\tau_\alpha > max\{|L|, |M_\alpha|^+\}$, en el caso de cardinal límite se toma las uniones. Sea por tanto $N = \bigcup\limits_{\alpha<\kappa^+} M_\alpha$. La construcción en el teorema 2.10.3 garantiza que N es $\kappa-$saturado. Vamos a ver que N tiene la condición para ser $\kappa-$ homogéneo. Sea C un conjunto de nuevas constantes tal que $|C| < \kappa$. Supongamos que f, g son funciones de C en N_0 donde $N_0 \preceq N$, tal que $(N_0, f(c))_{c\in C} \equiv (N_0, g(c))_{c\in C}$. Considere una isomorfía parcial $T_\alpha : \{a_i : i < \alpha\} = A_\alpha \to N$, con $N_0 = \{a_i : i < \lambda\}$ y tal que $T_\alpha(f(c)) = g(c)$, queremos encontrar una ismorfía $T_{\alpha+1} \supseteq T_\alpha$. Tomemos $T(a_{\alpha+1}) = a_{\alpha+1}$ si $a_{\alpha+1} \notin Dom(g)$, ahora si $a_{\alpha+1} = g(c)$ para alguna $c \in C$, entonces sea $b \in N$ tal que $b \models tp(g(c))/A_\alpha$. En el caso limite tomamos la unión de las funciones. Por tanto existe una inmersión T elemental de N_0 en N tal que $T(f(c)) = f(c)$ para todo $c \in C$. Para el caso general, supongamos que $(N, f(c))_{c\in C} \equiv (N, g(c))_{c\in C}$, entonces para todo $\alpha < \kappa^+$ existe T_α inmersión elemental de M_α en N, tal que $T_\alpha(f(c)) = g(c)$ para todo $c \in C$ y para $\delta < \alpha$ se tiene que $T_\delta \subseteq T_\alpha$. Por tanto, debe existir $\delta < \kappa^+$ tal que T_δ satisfaga que $(N, f(c)) \cong (N, g(c))$. $\square$

Definición 2.11.2 *Sea T un teoría completa en L y κ un cardinal infinito. Un dominio $\kappa-$universal para T es un modelo $\mathfrak{M}$ de T que es $\kappa-$saturado y fuertemente $\kappa-$homogéneo.*

Por los resultados anteriores tenemos que toda teoría completa tiene un dominio $\kappa-$universal.

2.12. Espacios de tipos

Consideremos una $L-$signatura de un espacio métrico y una $L-$teoría T completa. Supongamos que $\mathfrak{M}$ es un modelo de T y $A \subseteq M$. Se denota una $L(A)-$estrutura $(\mathfrak{M}, a)_{a\in A}$ por $\mathfrak{M}_A$ y por T_A una $L(A)-$teoría de $\mathfrak{M}_A$.

Definición 2.12.1 *Sean $x_1, \cdots, x_n$ variables distintas. Un conjunto p de $L(A)-$condiciones con variables libre en el conjunto $\{x_1, \cdots, x_n\}$ es llamado un $n-$tipo sobre A si existe un modelo $(\mathfrak{M}, a)a_{a\in A}$ de T_A y elementos $e_1, \cdots, e_n$ de M tal que p es el conjunto de todas las $L(A)-$condiciones $E(x_1, \cdots, x_n)$ para el cual $M_A \models E(e_1, \cdots, e_n)$. Cuando se presenta la relación arriba mencionada, se denota a p por $tp_{\mathfrak{M}}(e_1, \cdots, e_n/A)$ y llamamos a $(e_1, \cdots, e_n)$ realización de p en $\mathfrak{M}$. La colección de todos los $n-$tipos sobre A se denota por $S_n(T_A)$, o simplemente por $S_n(A)$*

2.12.1. Topologías sobre espacio de tipos

Supongamos que tenemos T_A una $L(A)-$teoría completa. Si $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ es una $L(A)-$fórmula y $\epsilon > 0$, entonces $[\varphi < \epsilon]$ denota el conjunto

$$\{q \in S_n(T_A) : \text{ para algún } 0 \leq \delta < \epsilon \text{ la condición } (\varphi \leq \delta) \in q\}$$

Definición 2.12.2 *La topología lógica sobre $S^n(T_A)$ se define como sigue: para $p \in S^n(T_A)$, las vecindades abiertas básicas de p es el conjunto*

$$\tau = \{[\varphi < \epsilon] : \varphi = 0 \in p, \epsilon > 0\}$$

Es un ejercicio ver que la colección τ anterior es una topología para $S^n(T_A)$. Además es de Hausdorff, en efecto, si p, q son elementos distintos de $S^n(T_A)$, entonces existe una $L(A)-$fórmula $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ tal que la condición $\varphi = 0$ pertenece a alguno de los tipos pero no al otro. Como los tipos son completos, existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi = r$ esta en el otro tipo. Tomando $[\varphi < r/2]$ y $[r \dot{-} \varphi < r/2]$ son básicos disjuntos, tal que en uno esta contenido p y en el otro q. Es usual la siguiente notación

$$[\varphi \leq \epsilon] = \{q \in S_n(T_A) | (\varphi \leq \epsilon \in q)\}$$

Cada conjunto $[\varphi \leq \epsilon]$ es cerrado en la lógica continua; en efecto, su complemento es ϕ si $\epsilon \geq 1$ y es $[1 \dot{-} \varphi < \delta]$ si $\epsilon < 1$ y $\delta = 1 - \epsilon$.

Lema 2.12.1 *Los subconjuntos cerrados de $S_n(T_A)$ para la topología lógica son exactamente los conjuntos de la forma $C_\Gamma = \{p \in S_n(T_A) | \Gamma(x_1, \cdots, x_n) \subseteq p\}$ donde $\Gamma(x_1, \cdots, x_n)$ es un conjunto de $L(A)-$ condiciones.*

Demostración Dado un conjunto de $L(A)-$condiciones $\Gamma(x_1, \cdots, x_n)$, observe que C_Γ es la intersección de todos los conjuntos $\varphi \leq 0$ donde $\varphi = 0$ es cualquier condición en Γ. Por tanto C_Γ es cerrado. Recíproca, supongamos C un subconjunto de $S_n(T_A)$ que es cerrado en la topología lógica y sea p cualquier elemento de $S_n(T_A) \backslash C$. Por la definición de la topología lógica existe una $L(A)-$condición $\varphi = 0$ en p y $\epsilon > 0$ tal que $[\varphi < \epsilon]$ es disyunto con C. Sin perdida de generalidad podemos asumir que $\epsilon \leq 1$. Entonces el conjunto cerrado $[(\epsilon \dot{-} \varphi) \leq 0]$ contiene a C, pero no contiene a p. Tómese a C como el conjunto de todas las condiciones de la forma $((\epsilon \dot{-} \varphi) = 0)$ que surge de esa forma.

Teorema 2.12.1 *Para todo $n \geq 1$, $S_n(T_A)$ es compacto con respecto a la topología lógica*

$\square$ **Demostración** Sean $n \geq 1$, y $C = \{[\varphi_\alpha < 0] | \alpha < \lambda\}$ subconjuntos de $S_n(T_A)$ con la pif . Por el resultado previo resulta entonces que cada $[\varphi_\alpha < 0]$, queda determinado por una $L(A)-$condición $\Gamma_\alpha(x_1, \cdots, x_n)$. Tener la pif , se transforma para $\{\Gamma_\alpha(x_1, \cdots, x_n) | \alpha < \lambda\}$ en que es finitamente satisfactible. Por compacidad lógica se obtiene el resultado. $\square$

2.12.2. La d-métrica sobre los tipos

Sea T_A como antes. Para cada $n \geq 1$ definimos una métrica natural sobre $S_n(T_A)$. Por el resultado del teorema 2.10.3, existe un modelo $\mathfrak{M}$ de T_A el cual contiene realizaciones para para todo $n \geq 1$ y todos los tipos en $S_n(T_A)$. Sea (M, d) el espacio métrico subyacente. Para $p, q \in S_n(T_A)$ definimos $d(p, q)$ por

$$inf\{\max_{1 \leq j \leq n} d(b_j, c_j) | \mathfrak{M}_A \models p[b_1, \cdots, b_n], \mathfrak{M}_A \models q[b_1, \cdots, b_n]\}$$

Note que si $p, q \in S_n(A)$, entonces por el teorema 2.10.3, y la suposición de $\mathfrak{M}_A$, existen realizaciones $(b_1, \cdots, b_n)$ de p y $(c_1, \cdots, c_n)$ de q en $\mathfrak{M}_A$, tal que $max_j d(b_j, c_j) = d(p, q)$. En particular, si $d(p, q) = 0$, entonces $p = q$; así d ,en efecto, es una métrica sobre $S_n(T_A)$.

Teorema 2.12.2 *La $d-$topología es mas fina que la topología lógica sobre $S_n(T_A)$*

Demostración Denotemos por τ_d, τ_L la topología generada por los abiertos de la métrica y la topología lógica, respectivamente. Queremos ver que $\tau_L \subseteq \tau_d$. Dado $\epsilon > 0$, sea $[\varphi < \epsilon]$ una vecindad abierta básica de p . Vamos a mostrar que $B_{\Delta_\varphi(\epsilon/2)}(p) \subseteq [\varphi < \epsilon]$, donde Δ_φ es el modulo de continuidad para $\varphi^{\mathfrak{M}}$. Sea $q \in B_{\Delta_\varphi(\epsilon/2)}(p)$ entonces $d(p, q) \leq \Delta_\varphi(\epsilon/2)$. Existe por tanto $\bar{a}, \bar{b}$ tal que $d(\bar{a}, \bar{b}) < \Delta_\varphi(\epsilon/2)$ y $\bar{a} \models p$ y $\bar{b} \models q$. Luego $|\varphi^{\mathfrak{M}}(\bar{a}) - \varphi^{\mathfrak{M}}(\bar{b})| < \epsilon/2$. Así que $\varphi^{\mathfrak{M}}(\bar{b}) < |\varphi^{\mathfrak{M}}(\bar{b})| < |\varphi^{\mathfrak{M}}(\bar{a}) - \varphi^{\mathfrak{M}}(\bar{b})| + |\varphi^{\mathfrak{M}}(\bar{a})| < \epsilon/2 + \epsilon/2$. □

Teorema 2.12.3 *El espacio métrico $(S_n(T_A), d)$ es completo.*

Demostración Sea $(p_k)_{k \geq 1}$ una sucesión de Cauchy en $(S_n(T_A), d)$. Sin perdida de generalidad podemos asumir que $d(p_k, p_{k+1}) \leq 2^{-k}$ para todo k. Sea $\mathfrak{M}$ un modelo de T_A, $\omega-$saturado y fuertemente $\omega-$homogéneo. Por la suposición anterior, tenemos que para todo $a \in M^n$ realización de p_k existe $b \in M^n$ realización de p_{n+1} tal que $d(a, b) = d(p_k, p_{k+1})$. Por tanto, inductivamente, podemos construir una sucesión $(b_k)_{k<\omega} \subseteq M^n$, ta que $b_k \models p_k$ y $d(b_k, b_{k+1}) = d(p_k, p_{k+1}) \leq 2^{-k}$ para todo $k \leq \omega$. Esto implica que $(b_k)_{k \leq \omega}$ es una sucesión de Cauchy en M^n convergente. Se tiene, por tanto, que el tipo realizado por b en M es el límite de la sucesión $(p_k)_{k \leq \omega}$. □

Capítulo 3

Tipos anchos sobre espacios de Banach

En el capítulo anterior obtuvimos un modelo universal para cada κ infinito de una $L-$estructura dada $\mathfrak{M}$. Por tanto, podemos asumir que todas las $L-$estructuras de espacios de Banach $\mathfrak{B}$ consideradas en este capítulo son elementalmente inmersos en algún modelo universal. Basta con construir un modelo saturado y fuertemente homogéneo para un κ^+, donde $\kappa > |M|$ para todas las $L-$estructura $\mathfrak{B}$ con espacio métrico subyacente (M, d) que se van a considerar en esta sección. Denotaremos a dicho modelo por $\mathfrak{C}$ y lo llamaremos modelo monstruo, extensión elemental de cualquier espacio de Banach $\mathfrak{B}$, por supuesto con la condición que $|M| < |\mathfrak{C}|$.

En esta sección consideramos 1-tipo $\pi(x)$ en un modelo M sobre un conjunto A, como una colección de condiciones de la forma $\varphi(x) \in [r_\varphi, s_\varphi]$, donde $\varphi(x)$ es una fórmula sobre A y $r_\varphi, s_\varphi \in \mathbb{R}$, y tal que $\pi(x)$ es finitamente satisfactible en M. Además $\pi(x)$ determinada cada una de las variables del lenguaje L, esto es, para toda variable $x \in L$, se tiene que la condición $||x|| = r \in \pi(x)$ para algún $r \in \mathbb{R}$.

Vamos a adicionar al lenguaje que se construyo en el capítulo anterior los siguientes elementos: añadimos un símbolo de constante 0, un símbolo de función $2-$ario para la adición de elementos, y para todo $r \in \mathbb{Q}$, un símbolo de función $1-$ario $r(x)$ para la multiplicación por r. De forma que el lenguaje defina un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$

Definición 3.0.1 *Decimos que un 1-tipo parcial $\pi(x)$ sobre A es ancho, si el conjunto de realizaciones de $\pi(x)$ en $\mathfrak{C}$ contiene una esfera unitaria de un sub-espacio de Banach de dimensión infinita. Esto es, si existe $F \subseteq B$ (donde B es el espacio de Banach subyacente a $\mathfrak{B}$) sub-espacio de dimensión infinita tal que $S_1(F) \subseteq \pi(\mathfrak{C})$, donde $S_1(F)$ es la esfera unitaria del sub-espacio F.*

Ejemplo 3.0.1 *Considere el tipo formado por $x = x^{\mathfrak{M}}$. Por supuesto es un tipo ancho.*

La siguiente definición es propia del análisis funcional, especialmente de la teoría de oscilaciones de funciones uniformemente continuas sobre la esfera unidad de un sub-espacio de dimensión infinita.

Definición 3.0.2 *1. Sea B un espacio de Banach y $S_1(B)$ la esfera unitaria de B, $f : S(B) \to \mathbb{R}$. El espectro $\gamma(f)$ es la colección de todos los $r \in \mathbb{R}$, tal que para todo $\epsilon > 0$ y todo entero k, existe un subespacio F de B $k-$dimensional tal que $|f(x) - r| \leq \epsilon$ para todo x en el cuadrado unitario de F.*

2. Sea B, f como se definió en 1. Denotamos por $\gamma'(f)$ la colección de todos los $r \in \mathbb{R}$, tal que para todo k, ϵ como arriba, F puede ser elegido como $(1+\epsilon)-$isomorfo al espacio de Hilber $k - dimensional$.

Obsérvese que $\gamma'(f) \subset \gamma(f)$.

Hecho 3.0.1 *Teorema de Dvretzky-Milman Sea f una función uniformemente continua sobre la esfera unitaria de un espacio de Banach B de dimensión infinita. Entonces el espectro $\gamma(f)$ es no vacío. Se tiene también que $\gamma'(f)$ es no vacío.*

Para la prueba se puede consultar [1] en el capítulo 12.
Dado una fórmula $\varphi(x, a)$ y un tipo ancho $\pi(x)$, queremos determinar algún $s \in \mathbb{R}$ que garantice la existencia de un tipo $p(x)$ ancho, extensión de $\pi(x)$ y $\varphi(x, a) = s$. Es el contenido del siguiente teorema

Teorema 3.0.1 *Sea $\pi(x)$ un tipo parcial ancho, A un conjunto que contiene el dominio de π, $\varphi(x, a)$ una fórmula sobre A. Entonces existe $r \in \mathbb{R}$, tal que el tipo parcial $\pi(x) \cup [\varphi(x, a) = r]$ es ancho.*

Demostración: Podemos asumir que $||x||^{\pi} = 1$. Como $\pi(x)$ es un tipo ancho, entonces existe un subespacio F de $\mathfrak{B}$ de dimensión infinita, cuya esfera unidad $S_1(F)$ esta contenida en $\pi(\mathfrak{C})$. Como quedo claro del capítulo 1, la fórmula $\varphi(x, a)$ induce una función uniformemente continua de $S_1(F)$ en $\mathbb{R}$; $\varphi^{\mathfrak{B}}(x, a)|_{S_1(F)}$ es uniformemente continua. Por resultado del teorema 3.0.1, existe $r \in \gamma'(\varphi^{\mathfrak{B}}(x, a)|_{S_1(F)})$. Sea $H = l_2$ (espacio de Hilbert). Para cada $v \in H$, introducimos una variable libre x_v. Se pretende asignar a cada uno de los elementos de H una variable que lo nombre y respete la estructura del espacio. Es así que definimos el siguiente conjunto

$$\Lambda(x) = \{x_v = \textstyle\sum_{i<k} \lambda_i x_{v_i} : v, v_i \in H, \lambda_i \in \mathbb{R}, v = \sum_{i<k} \lambda_i v_i\}$$

Consideremos los siguientes conjuntos

$$\Upsilon(x) = \{\pi(x_v), |\varphi(x_v, a) - r| \leq \epsilon : ||v||_H = 1, \epsilon > 0\}$$

$$\Omega(x) = \{(1-\epsilon)||v||_H \leq ||x_v|| \leq (1+\epsilon)||v||_H : v \in H, \epsilon > 0\}$$

$$\Gamma(x) = \Lambda(x) \cup \Upsilon(x) \cup \Omega$$

Escribimos de forma alterna $\Upsilon(x)$. Donde $\pi(x_v)$ designara el tipo original $\pi(x)$ cambiando la variable x por la que designa a $v \in H$, es decir x_v. Por lo tanto tenemos

$$\Upsilon(x) = \bigcup_{\{||v||_H=1\}} (\pi(x_v)) \cup \{|\varphi(x_v, a) - r| \leq : ||v||_H = 1, \epsilon > 0\}$$

Así que el conjunto $\Upsilon(x) \cup \Lambda(x)$ nombra a todos los elementos de norma 1 en H que satisfacen la condición para la cual r esta en el espectro de $\varphi^{\mathfrak{B}}(x, a)$, mientras que $\Omega(x)$ nombra al espacio que es $(1+\epsilon)$-isomorfo al espacio H. Veremos que $\Gamma(x)$ es finitamente satisfactible en $\mathfrak{C}$. En efecto, dado $k, \epsilon > 0$, por ser $r \in \gamma'$, entonces existe F un $k-$sub-espacio de B el cual es $(1+\epsilon)-$isomorfo al espacio k-dimensional de Hilberth l_2^k, tal que $|\varphi^{\mathfrak{B}}(x, a) - r| < \epsilon$ en la esfera unidad de F.

Lo anterior muestra que $\Gamma(x)$ es finitamente satisfactible y por el teorema de compacidad que $\Gamma(x)$ es satisfactible. Sea $\mathfrak{M}$ modelo, tal que $a \in \mathfrak{M}$ y a sea realización de $\pi_\varphi(x) = \pi(x) \cup \{\varphi(x, a) = r\}$. En M, sub-espacio de Banach subyacente en $\mathfrak{M}$, existe F' sub-espacio de dimensión infinita de M isomorfo a un sub-espacio de dimensión infinita del espacio H tal que $S_1(F) \subseteq \pi_\varphi(\mathfrak{C})$. $\Box$

Obsérvese que el papel preponderante de la prueba del teorema anterior recae completamente en el hecho 3.0.1. El hecho mencionado es crucial en el desarrollo de este capítulo. Es éste hecho el que nos va a dar garantías de la existencia de tipos anchos completos. Como se verá en el teorema 3.0.2.

Lema 3.0.1 *Sea $\langle \pi : i \in \lambda \rangle$ una cadena creciente de tipos parciales anchos. Entonces $\pi = \cup_{i\in\lambda}\pi_i$ es ancho.*

Demostración: Consideremos el conjunto

$$\Gamma(x) = \Lambda(x) \cup \Omega(x) \cup \{\pi_i(x_v) : ||v||_H = 1, i < \lambda\}$$

donde $\Lambda(x), \Omega(x)$ son definidos como en la prueba del teorema 3.0.1. Vamos a mostrar que los conjuntos anteriores son consistentes. Basta observa que si $i_1 < \cdots < i_n < \lambda$, entonces el conjunto de realizaciones de $\pi_{i_1}(x)$ contiene la esfera unitaria de algún sub-espacio F de dimensión infinita (es decir, es consistente con $\Lambda(x)$) tal que $S_1(F)$ satisface $\pi_{i_1}(x)$, como cada $x \in S_1(F)$ se tiene que $||x|| = 1$. La condición de $\Omega(x)$, la satisface cada uno de los elementos en $S_1(F)$, puesto que para $x \in S_1(F)$ se tiene que $(1-\epsilon) \leq ||x|| \leq (1+\epsilon)$. Por tanto $\Gamma(x)$ es finitamente satisfactible. $\Box$

Teorema 3.0.2 *(Existencia de tipos anchos) Sea $\pi(x)$ un tipo parcial ancho, A un conjunto que contiene el dominio de π, Δ una colección de fórmulas cerradas bajo conectivos. Entonces existe un $\Delta-$tipo p completo sobre A que contiene a π, el cual es ancho.*

Demostración: Sin perdida de generalidad podemos asumir que $||x||^\pi = 1$. Enumerando todas las $\Delta-$fórmulas sobre A, $\langle \varphi_\alpha(x, a_\alpha) : \alpha < \lambda = |A| + |T| \rangle$, tal que si δ es un ordinal limite y $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_k < \delta$, entonces para todo k-ario conectivo F, se tiene para algún $\alpha < \delta$

$$(\varphi_{\alpha_1}(x, a_{\alpha_1}), \cdots, \varphi_{\alpha_k}(x, a_{\alpha_k})) = \varphi_\alpha(x, a_\alpha) \tag{3-1}$$

Por ser Δ una colección de fórmulas cerradas bajo conectivos.

Se construirá una sucesión creciente de tipos anchos π_α, por inducción sobre α, tal que

- $\pi_0(x) = \pi(x)$
- $\pi_\alpha(x)$ determine el valor de $\varphi_\beta(x, a_\beta)$ para todo $\beta < \alpha$.

Caso sucesor. Supongamos que $\pi_\alpha(x)$ es ancho y que determina todos los valores de $\varphi_\beta(x, a_\beta)$ para todo $\beta < \alpha$. Consideremos $\varphi_{\alpha+1}(x, a_{\alpha+1})$, entonces por el resultado del teorema 3.0.1, existe $r \in \mathbb{R}$, tal que $\pi_\alpha \cup \{\varphi_\alpha(x, a_\alpha) = r\}$ es un tipo parcial ancho, por supuesto con la propiedad deseada.
Caso limite. Sea $\pi_\alpha = \cup_{\delta<\alpha}\pi_\delta$, donde cada una de las π_δ determinan el valor de $\varphi_\beta(x, a_\beta)$ para todo $\beta < \delta$. Por tanto, resulta por el lema 3.0.1 que π_α es un tipo parcial ancho. Es claro que por (3-1), π_α determina todos los valores de $\varphi_\delta(x, a_\delta)$ tal que $\delta < \alpha$. Por supuesto $p = \pi_\lambda$. $\square$

Corolario 3.0.1 *Sea $\pi(x)$ un tipo parcial ancho, A un conjunto que contiene el dominio de $\pi(x)$, Δ una colección de fórmulas cerradas sobre conectivos. Entonces existe un Δ-tipo completo p sobre A, extensión de π, tal que existe un sub-espacio F de dimensión infinita isométrico a un subespacio del espacio de Hilbert de dimensión infinita, tal que $S_1(F) \subseteq p(\mathfrak{C})$.*

3.0.1. Tipos estables anchos y bifurcación

Definición 3.0.3 *(Clausura algebraica de un conjunto) Dado un conjunto A, la clausura algebraica de A, denotada por $acl(A)$, es el conjunto de todos los elementos cuya órbita bajo la acción del grupo de los automorfismos $Aut(\mathfrak{C}/A)$ es finita.*

Definición 3.0.4 *(Tipo definible) Dado un Δ-tipo p completo se dice definible, si para toda Δ-formula $\varphi(x, y)$, la función $\theta(y) = d_p x\varphi(x, y)$ definida por $d_p x\varphi(x, a) = \varphi^p(x, a)$ es un predicado definible (esto es, que puede ser aproximada uniformemente por fórmulas). Decimos que π es Δ-definible si para toda Δ-formula φ, la función $d_\pi x(x, y)$ puede ser aproximada por Δ-fórmulas.*

Como ejemplo, sea Δ la colección de todas las fórmulas libres de cuantificadores en el lenguaje $L_{\mathfrak{B}}$, y sea p un 1-tipo completo libre de cuantificadores sobre un sub-espacio cerrado A. Así p queda determinado por las condiciones de la forma $||x + a|| = r_a$ para todo $a \in A$. En otras palabras, p esta determinado por la función $\tau_p : A \to \mathbb{R}$ definida por $\tau(a) =$

$||x+a||^p$. Así que p es definible si estas funciones son predicados definibles (pueden ser aproximadas uniformemente por fórmulas), y se dice libre-cuantificadores definible, si puede ser aproximado uniformemente por fórmulas libres de cuantificadores.

Definición 3.0.5 *Sea Δ una colección de fórmulas cerrada bajo conectivos y permutaciones de variables. Un $\Delta-$tipo parcial π sobre un conjunto A, es llamado $\Delta-$estable si toda extensión a un $\Delta-$tipo sobre $\mathfrak{C}$ es $\Delta-$definible.*

3.0.2. Bifurcación

Recordemos que una sucesión I en $\mathfrak{C}$ es indiscernible sobre un conjunto A si cualquier dos sub-sucesiones finitas de I de la misma longitud tiene el mismo tipo sobre A.

Definición 3.0.6 *Para $k<\omega$, decimos que un conjunto de fórmulas $q(x)$ es $k-$contradictorio si todo subconjunto $q(x)$ de k elementos es inconsistente.*

Observación: Considere $\langle a_i : i<\omega\rangle$ es una sucesión de indiscernibles y el conjunto $A=\{\varphi(x,a_i) : i<\omega\}$ es inconsistente. Por el teorema de compacidad, existe un subconjunto finito de fórmulas, las cuales no son consistentes. Es decir, existen $\varphi(x,a_{i_1}),\cdots,\varphi(x,a_{i_k})$ las cuales son inconsistentes. Para todo k elementos que se elijan de A, se tiene que ninguna $k-$tuplas de elementos de $\langle a_i : i<\omega\rangle$ las realizan. Así resulta que $\{\varphi(x,a_i) : i<\omega\}$ es $k-$contradictorio para k.

Definición 3.0.7
1. *Una formula $\varphi(x,b)$ divide sobre A si existe una sucesión infinita I y $k<\omega$ tal que*
   a) *$tp(c/A)=tp(b/A)$ para todo $c\in I$;*
   b) *el conjunto $\{\varphi(x,c) : c\in I\}$ es $k-$contradictorio*
2. *Un tipo p (posiblemente con variables infinitas) divide sobre A si existe una formula $\varphi(x,b)$ tal que $p\vdash\varphi(x,b)$ y $\varphi(x,b)$ divide sobre A.*

Teorema 3.0.3 *suponga que $B\subseteq A,C$. Si $tp(a/C)$ no divide sobre B para todo $a\in A$, entonces $A\cap C=B$*

Demostración: Supongamos que $a\in(A\cap C)-B$, y que existen $\varphi(x,c)$ formula, y I_φ,k_φ tales que $tp(a/C)\vdash\varphi(x,c)$, con $tp(c/B)=tp(s/B)$ para todo $s\in I_\varphi$ y $\{\varphi(x,s) : s\in I_\varphi\}$ es $k_\varphi-$contradictorio. Del hecho que $tp(a/C)\vdash\varphi(x,c)$ se deduce que $tp(c/C)\vdash\varphi(x,a)$. Por otro lado, se tiene que $tp(c/B)\subseteq tp(c/C)$, así que $tp(s/B)\subseteq tp(c/C)$ para todo $s\in I_\varphi$. Como $tp(c/C)\vdash\varphi(x,a)$, se tiene que $\varphi(x,a)\in tp(c/C)$, por lo cual $\neg\varphi(x,a)\in tp(s/B)$, por lo que (por ser $a\notin B$) se tiene que a no es parámetro de la formula φ. Esto Contradice el hecho que es $k_\varphi-$contradictorio, pues el conjunto $\{\varphi(x,s) : s\in I_\varphi\}$ se transforma en $\{\varphi(x)\}$. $\square$

Sea p un tipo y A un conjunto. Las siguientes condiciones son equivalentes

1. El tipo p no divide sobre A;

2. para cada A-automorfimos f, el tipo $f(p)$ no divide sobre A.

3. Existe un $A-$automorfismo f tal que el tipo $f(p)$ no divide sobre A

Demostración: $2 \to 3$ es claro.
$1 \to 2$. Supongamos que existe $A-$automorfismo f tal que $f(p)$ divide sobre A, entonces existen $\varphi(x,c)$ fórmula con $f(p) \models \varphi(x,c)$ y $c \in Dom(f(p))$, por lo que $c \in f(Dom(p))$ y I_φ, k_φ tal que $\{\varphi(x,s) : s \in I_\varphi\}$ es $k_\varphi-$contradictorio y $tp(c/A) = tp(s/A)$ para todo $s \in I_\varphi$. Así que existe c' tal que $f(c') = c$, y además para todo $s \in I_\varphi$, existen s' y $f \in Aut(\mathfrak{C}/A)$, tal que $f(s') = s$. Así para $I'_\varphi = \{s' :$ existen $f \in Aut(\mathfrak{C}/A), f(s') = s$ con $s \in I_\varphi\}$, por lo tanto $\{\varphi(x,s') : s \in I'_\varphi\}$ es k_φ-contradictorio
$3 \to 1$ Se razona de forma análoga, tomando la preimagen por el $A - automorfismo$.

Definición 3.0.8 *1. Una formula $\varphi(x,b)$ bifurca sobre A si existe $n < \omega$ y $\{\varphi_i(x,b^i) : i < n\}$ tal que*

   a) $\varphi(x,b) \vdash \vee_{i<n}\varphi_i(x,b^i)$ *y*

   b) $\varphi_i(x,b^i)$ *divide sobre A para todo $i < n$.*

2. Un tipo p bifurca sobre A si existe una formula $\varphi(x,b)$ tal que $p \vdash \varphi(x,b)$ y $\varphi(x,b)$ bifurca sobre A.

3. Para una sucesión a y conjuntos A, B, notamos el hecho que $tp(a/B)$ no bifurca sobre A de la siguiente forma $a \underset{B}{\downarrow} A$

4. Para conjuntos A, B, C el símbolo $A \underset{B}{\downarrow} C$, es una manera corta de: $a \underset{B}{\downarrow} A$ para todo $a \in A$.

Obsérvese que

1. Si $\varphi(x,b)$ divide sobre A, entonces $\varphi(x,b)$ bifurca sobre A.

2. Si $\varphi(x,b) \vdash \vee_{i<n}\varphi_i(x,b^i)$ y $\varphi_i(x,b^i)$ bifurca sobre A, entonces $\varphi(x,b)$ bifurca sobre A. Basta observa que para cada $i < \omega$ existen $\varphi_{i,j}(x,(b^i)^j)$ para todo $j < m < \omega$, tal que $\varphi_{i,j}(x,(b^i)^j)$ divide sobre A y $\varphi_i(x,b^i) \vdash \underset{j<m}{\vee}\varphi_{i,j}(x,(b^i)^j)$, por lo tanto $\varphi(x,b) \vdash \underset{i<n}{\vee}(\underset{j<m}{\vee}\varphi_{i,j}(x,(b^i)^j))$.

3. (Característica finita de bifurcación) Si $p \in S_1(B)$ bifurca sobre A, entonces existe $\varphi(x,b) \in p$ tal que $\varphi(x,b)$ bifurca sobre A.

4. Si $a \in A \subseteq B$, entonces $tp(a/B)$ no bifurca sobre A.

Teorema 3.0.4 *Supongamos A, B, C son conjuntos que satisface $B \subseteq A \cap C$ entonces $A \underset{B}{\downarrow} C$ implica $A \cap C = B$.*

Demostración: Considere

$$\Gamma := \{\neg\phi((x,b) : b \in B, \phi(x,b) \text{bifurca sobre} A\} \tag{3-2}$$

Veamos que $p \cup \Gamma$ es consistente. Si $p \cup \Gamma$ es inconsistente, entonces existe $\{\neg\phi_i(x, b_i) : i < n\} \subseteq \Gamma$ tal que $p \cup \{\neg\phi_i(x, b_i : i < n)\}$ es inconsistente. Pero entonces, $p \vdash \vee_{i<n}\phi_i(x, b_i)$ y para todo $\phi_i(x, b_i)$ bifurca sobre A. Entonces, p bifurca sobre A, lo cual es contradictorio. Elijase una extensión completa $q \in S(B)$ de $p \cup \Gamma$. Si q bifurca sobre A, existe $\phi(x,b) \in q$ tal que $\phi(x,b)$ bifurca sobre A.Por la definición de Γ, tenemos que $\neg\phi(x,b) \in \Gamma \subseteq q$, lo cual es una contradicción. Entonces, q no bifurca sobre A. $\square$.

Definición 3.0.9 *Un tipo p es estacionario sobre A si y solo si para todo B, con $Dom(p) \subseteq B$ y todo $q_1, q_2 \in S(B)$ extensión de p se tiene que si q_1, q_2 no bifurcan sobre A entonces $q_1 = q_2$.*

Teorema 3.0.5 *Sea p un tipo tal que p no bifurca sobre A. Si existe $A \subseteq B$ tal que $p|B$ es estacionario sobre A, entonces p no rompe sobre B*

Demostración: Supongamos que p rompe sobre B. Entonces existe $a, b \in Dom(p)$ y una formula $\varphi(x,y)$ tal que $tp(a/B) = tp(b/B)$ y $\varphi(x,a), \neg\varphi(x,b) \in p$. Sea $f \in Aut_B(\mathfrak{C})$, tal que $f(b) = a$.Como $p|B \cup \{\neg\varphi(x,b)\} \subseteq p$, se tiene entonces que $p|B \cup \{\neg\varphi(x,b)\}$ no rompe sobre A. Por la segunda observación que sigue al teorema 3.0.3, tenemos $f(p|B) \cup \{\neg\varphi(x,b)\}$ no bifurca sobre A. Como $f|A = id_A$ y $f(b) = a$, tenemos que $q_1 := p|B \cup \{\neg\varphi(x,b)\}$ no bifurca sobre A. Por otro lado, como $p|B \cup \{\varphi(x,a)\} \subseteq p$ se tiene que $q_2 := p|B \cup \{\varphi(x,a)\}$ no bifurca sobre A.
Los tipos q_1, q_2 contradice el hecho que $p|B$ sea estacionario. $\square$

3.0.3. Tipos estables en lógica continua y obtención de indiscernibles

Sea Δ una colección de fórmulas cerradas bajo conectivos y permutaciones. Para el caso de la lógica continua tenemos

Definición 3.0.10 *Sea $p \in S_\Delta(A)$ un $\Delta-$tipo completo estable sobre A, y sea ρ un $\Delta-$tipo parcial extensión de p. Decimos que ρ no bifurca sobre A si ρ es definible sobre $acl(A)$.*

Observación: Sean $q_1, q_2 \supseteq p$ extensión de p tales que q_1, q_2 son $\Delta-$definibles en $acl(A)$. Sea $\varphi(x,a) = r \in q_1$, como q_2 es completo, existe $r' \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(x,a) = r' \in q_2$. Como q_2 es $\Delta-$definible en $acl(A)$, existen $\{\varphi_\alpha(x, a_\alpha) : \alpha < \lambda\}$ que aproxima $\varphi(x,a)$ con $a_\alpha \in acl(A)$

para todo $\alpha < \lambda$. Como q_1 es completo ($q_1 \supseteq p$), entonces q_1 determina cada $\varphi_\alpha(x, a_\alpha)$. Por tanto, existe $r_\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(x, a_\alpha) = r_\alpha \in q_1$. Por otro lado, como q_1 también es $\Delta-$definible en $acl(A)$ existen $\varphi_{\alpha'}(x, a_{\alpha'})$ que aproximan $\varphi(x, a)$ en q_1. En definitiva

$$\begin{aligned} ||\varphi_\alpha^{\mathfrak{M}}(x, a_\alpha) - \varphi_{\alpha'}^{\mathfrak{M}}(x, a_{\alpha'})|| &\leq ||\varphi^{\mathfrak{M}}(x, a) - \varphi_\alpha^{\mathfrak{M}}(x, a_\alpha)|| + ||\varphi^{\mathfrak{M}}(x, a) - \varphi_{\alpha'}^{\mathfrak{M}}(x, a_{\alpha'})|| \\ &= \epsilon(a_\alpha) + \epsilon(a_{\alpha'}) \end{aligned}$$

donde $||\varphi^{\mathfrak{M}}(x, a) - \varphi_{\alpha'}^{\mathfrak{M}}(x, a_{\alpha'})|| = \epsilon(a_{\alpha'})$ y $||\varphi^{\mathfrak{M}}(x, a) - \varphi_\alpha^{\mathfrak{M}}(x, a_\alpha)|| = \epsilon(a_\alpha)$. Como $a_\alpha, a_{\alpha'} \in acl(A)$, podemos obtener ϵ tal que $||\varphi_\alpha^{\mathfrak{M}}(x, a_\alpha) - \varphi_{\alpha'}^{\mathfrak{M}}(x, a_{\alpha'})|| < \epsilon$ y para todo $f, g \in Aut(\mathfrak{C}/A)$, se tiene que $||f(\varphi_\alpha^{\mathfrak{M}}(x, a_\alpha)) - g(\varphi_{\alpha'}^{\mathfrak{M}}(x, a_{\alpha'}))|| < \epsilon$. Lo que lleva a que $\varphi(x, a_{\alpha'})$ es definible por $\{\varphi_{\alpha'}(x, a_{\alpha'})\}$. Por tanto, $\varphi(x_a) = r$ es definible en q_2. Por tanto resulta que $\varphi(x_a) = r \in q_2$. Por tanto $q_1 \subseteq q_2$. De forma análoga podemos demostrar que $q_2 \subseteq q_1$.
Lo anterior demuestra que para todo p tipo estable completo sobre $A = acl(A)$ entonces es estacionario.

Teorema 3.0.6 *Sea $p = p_0$ un tipo $\Delta-$estable. Entonces no existe una sucesión creciente de $\Delta-$tipos $\langle p_i : i < |\Delta|^+\rangle$ tal que p_{i+1} es una extensión bifurcada de p_i.*

Demostración: Denotemos $\lambda = |\Delta|$. Sea $q = \cup_{i<\lambda^+} p_i$. Como q extiende a $p = p_0$ y p es estable, q es $\Delta-$definible, por tanto definible sobre un conjunto $B \subset dom(p_i)$. Como $p_{i+1} = q|dom(p_{i+1})$, implica que p_{i+1} es definible sobre B, por tanto p_{i+1} es una extensión de p_i que no bifurca, una contradicción. $\square$
En lo que resta de la sesión consideremos Δ conjunto de fórmulas libres de cuantificadores de $L_{\mathfrak{B}}$ cerrada para conectivos y permutación de variables. Nos olvidaremos y olvidaremos en lo que resta de la sesión de escribir $\Delta-$tipo o $\Delta-$fórmulas, y simplemente escribiremos tipo o formula.

Teorema 3.0.7 *Sea $\pi(x)$ un tipo parcial ancho sobre un conjunto A. Entonces existe $B \supseteq A$ con $|B - A| \leq |\Delta|$ y $p \in S_\Delta(B)$ el cual es ancho minimal.Es decir, si $B' \supset B$, entonces para todo tipo p tal que $Dom(p) \supseteq B'$, entonces p no bifurca sobre A.*

Demostración: Se construye por inducción una sucesión continua creciente de conjuntos A_i y una sucesión creciente de tipos $p_i \in S_\Delta(A_i)$ tal que

- $A_0 = A$
- $|A_{i+1} - A_i|$ es finito
- p_0 extiende a π
- p_i es ancho para todo i
- p_{i+1} bifurca sobre A_i

Caso sucesor. Supongamos que las condiciones anteriores se tienen para i y consideremos la obtención del caso $i+1$. Sea $a \in (\mathfrak{C} - \overline{acl(A_i)})$. Consideremos $A_{i+1} = A_i \cup \{a\}$, entonces en virtud del teorema 3.0.1, existe un tipo $p = p_{i+1}$ extensión de p_i el cual es ancho y contiene a la formula $||x - a|| = 0$. También resulta que, p_{i+1} bifurca sobre A_i, puesto que a no puede ser alcanzada por funciones continuamente convergentes en A_i.
Caso límite. Supongamos $\langle A_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$ y $\langle p_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$ con $\lambda < |\Delta|^+$ cumple las condiciones del teorema, es así que para todo $\alpha < \lambda$ se tiene que p_α es ancho, y para todo $\alpha < \lambda$ existe $\delta < \lambda$ tal que p_α bifurca sobre A_δ. Por lo tanto para $\rho = \bigcup_{\alpha<\lambda} p_\alpha$ existe $\eta < \lambda$ tal que $\rho \in S(A_\eta) \subseteq S(acl(A_\eta))$. El lema 3.0.1 asegura que $\bigcup_{\alpha<\lambda} p_\alpha$ es ancho. Basta, por tanto, tomar una extensión finita de ρ, sea ρ_1 dicha extensión. ρ_1 bifurca, puesto que existe elementos de ρ_1 fuera de la clausura algebraica del $Dom(\rho) = acl(A_\eta)$
Lo anterior demuestra que la construcción menciona se puede realizar. Veamos que con $\rho = \bigcup_{\alpha<\|\Delta|^+} A_\alpha$ y $B = acl(Dom(\rho)) = A'_\eta$ se tiene el resultado del teorema. Nuevamente por el lema 3.0.1 ρ resulta ser ancho, además por la construcción se tiene que $|B - A| \leq |A'_\eta| \leq |\Delta|$, y no bifurca puesto que $A'_\eta = acl(A'_\eta)$. Supongamos ahora que existe $C \supset B$ entonces existe $c \in (C - B)$ y por tanto $c \notin acl(A'_\eta) = A'_\eta$. La fórmula $||c - x|| = 0 \in S(B)$ no bifurca sobre B, puesto que $||c - x||$ no puede ser definida en $acl(A'_\eta)$. □

Sea O un conjunto ordenado linealmente. Una secuencia $I = \langle a_i | i \in O \rangle$ es llamado $\Delta-$indiscernible sobre un conjunto A si el Δ-tipo $tp(J_1/A) = tp(J_2/A)$, tal que $J_1 = (a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_k})$ y $J_2 = (a_{j_1} a_{j_2} \cdots a_{j_k})$ con $a_{i_s} < a_{i_k}$ si y solo si $a_{j_s} < a_{j_k}$.

Una sucesión $\{a_i\}_{i \in I}$ se dice totalmente indiscernible si $tp(a_{i_1}, a_{i_2} \cdots a_{i_n}) = tp(a_{j_1}, a_{j_2} \cdots a_{j_n})$ para todo $i_1, \cdots, i_n, j_1, \cdots, j_n$, sujetos a la condición que $i_k \neq i_s$ y $j_k \neq j_s$ para $k \neq s$. La condición para que $\{a_i : i \in I\}$ sea totalmente indiscernible no depende del orden de I, y es en realidad una propiedad del conjunto $\{a_i : i \in I\}$, por tanto también lo llamaremos conjunto indiscernible. Una sucesión $I = \langle a_i : i \in \lambda \rangle$ es llamada un conjunto indiscernible sobre A, si el tipo de cualquier sucesión finita $a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_k}$ sobre A depende solo del número k.

Definición 3.0.11 *Sea $A \subseteq B$ y p un tipo sobre B. La sucesión $\langle a_\alpha | \alpha < \lambda \rangle$ es una sucesión de Morley para p sobre A si*

1. *para todo $\alpha < \lambda$, a_n realiza p;*
2. *para cada $\alpha < \lambda$, el tipo $tp(a_\alpha / B \cup \{a_\gamma | \gamma < \alpha\})$ no bifurca sobre A;*
3. *$\langle a_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$ es indiscernible sobre B.*

Hecho 3.0.2 *Sea q un tipo global definible sobre un conjunto $A = alc(A)$. Definamos $I = \langle a_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$ una sucesión de elementos tal que $a_\alpha \models q | A_{<\alpha}$. Entonces I es indiscernible en q sobre A.*

Demostración: Es claro que la sucesión cumple con las condiciones (1) y (3), basta por tanto verificar que la (2) condición de la definición anterior. Pero para cada a_α y cada fórmula $\varphi(x, a_\alpha)$ que tenga como parámetro a a_α no puede ser aproximado por funciones uniformemente continuas con parámetro en A. $\square$

Hecho 3.0.3 *1. Sea p un tipo estable, I una sucesión de indiscernibles realizaciones de p. Entonces I es un conjunto indiscernible*

2. Sea p un tipo estable, A un conjunto, I una sucesión de realizaciones de p de longitud al menos $(|A| + |T|)^+$. Entonces existe una sub-sucesión infinita $I' \subseteq I$, el cual es indiscernible sobre A.

[5]

3.0.4. Indiscernibles

Definición 3.0.12 *Dado α un ordinal. Un conjunto $S \subseteq \alpha$ es un cerrado no acotado (club) si:*

1. *Si para todo $\beta < \alpha$ existe $\gamma \in S$ tal que $\gamma > \beta$*
2. *Para todo $S' \subseteq S$ acotado se tiene que $\cup S' \in S$.*

Definición 3.0.13 *Un conjunto $S \subseteq \kappa$ es estacionario en κ si S intersecta todo los club subconjuntos de κ.*

Ejemplo 3.0.2 *$D = \{\alpha + 1 : \alpha < \lambda\}$ no es un club. Considere $S = \{\alpha_n \in D : n < \omega\}$, con $\alpha_n = \alpha + n$. Entonces $\cup S = \omega + \omega$, el cual no es un ordinal sucesor.*

Teorema 3.0.8 *Teorema de Fodor Sea $\lambda > \aleph_0$ regular. Suponga que $S \subseteq \lambda$ es estacionario. Si $f : S \to \lambda$ es una función regresiva (esto es, para todo $i \in S - \{0\}$ se tiene $f(i) < i$), entonces existe $S' \subseteq S$ estacionario y $i_0 < \lambda$ tal que si $i \in S'$ entonces $f(i) = i_0$*

Hecho 3.0.4 *Caracter finito de no bifurcación Si T es $\aleph_0-$estable, entonces para todo tipo completo p existe un subconjunto finito $A \subset Dom(p)$ tal que p no bifurca sobre A.*

Teorema 3.0.9 *Suponga que $\mathfrak{M}$ es una estructura no contable tal que $Th(M)$ es $\aleph_0$. Para todo A, $I \subseteq M$, y cardinal λ infinito con $|A| \leq \lambda < |I|$, entonces existe $J \subseteq I$ de cardinalidad λ^+ el cual es una secuencia de indiscernible sobre el conjunto A.*

Demostración Tomemos $\{a_i : i < \lambda^+\} \subseteq I$. Usando el teorema descendente de Löwenheim-Skolem y el teorema de la cadena de Tarski-Vaught podemos definir $\{M_i \prec M | i < \lambda^+\}$ tal que

1. $A \subseteq M_0$
2. Si $i < j < \lambda^+$, entonces $M_i \prec M_j$.
3. $|M_i| = \lambda$ para todo $i < \lambda^+$.
4. $a_i \in M_{i+1}$ para todo $i < \lambda^+$.
5. Para todo $b \in M$ y todo $i < \lambda^+$ existe $b' \in M_{i+1}$ que realiza a $tp_M(b/M_i)$, y
6. Si $\delta < \lambda^+$ es un cardinal limite entonces $M_\delta = \underset{i<\delta}{\cup} M_i$.

Esta construcción es típica en teoría de modelos y vamos a omitir su construcción. Lo único que queda por revisar es el 5.Como es $\aleph_0-$estable, entonces como se vio en el primer capitulo es estable para todo $\lambda > \omega$, así que el $S^{\mathfrak{M}_i}(M_i) \leq \lambda$, lo cual permite encontrar realizaciones en un modelo saturado. Como T es $\aleph_0-$estable por el hecho 3.0.4 para todo $i < \lambda^+$ existe un subconjunto finito $B_i \subseteq M_i$ tal que p_i no rompe sobre el conjunto B_i. Consideremos el conjunto $S := \{\delta < \lambda^+ : cf(\delta) = \aleph_0\}$, es un ejercicio mostrar que S es un subconjunto de λ^+ estacionario. Consideremos la siguiente función $f : S \to \lambda^+$ definido como sigue: $f(\delta) := min\{j : B_\delta \subset M_j\}$, como B_δ es finito y la cadena es continua la función f se preserva, esto es $f(\delta) < \delta$ para todo $\delta \in S$. Por el teorema de Fodor (hecho 3.0.8) existe $i_0 < \lambda^+$ y un subconjunto estacionario $S^* \subseteq S$ tal que $f(\delta) = i_0$ para todo $\delta \in S^*$. Para todo $\delta \in S^*$ consideremos $g : \delta \mapsto B_\delta$. Por la elección de S^* y i_0 la función g se define en los subconjunto finitos de M_{i_0}. Como el numero de subconjuntos finito de M_{i_0} es λ y $|S^*| = \lambda^+$, entonces existe $S' \subset S^*$ de cardinalidad λ^+ y un conjunto finito $B \subseteq M_{i_0}$ tal que si $\delta \in S'$ entonces $B_\delta = B$. Para cada $\delta \in S'$ consideremos $h : \delta \mapsto p_\delta|M_{i_0+1}$. Como el dominio tiene cardinalidad λ^+ y su imagen es $S^1(M_{i_0+1})$, por estabilidad, existen $S^{**} \subseteq S'$ de cardinal λ^+ y un tipo $q \in S^1(M_{i_0+1})$ tal que si $\delta \in S^{**}$ entonces $p_\delta|M_{i_0+1} = q$. Sea $S^{***} = \{\delta \in S^{**}|\delta > i_0\}$. Tómese $\{i_\zeta|\zeta < \lambda^+\}$. Defina $J = \{a_{i_\zeta}|\zeta < \lambda^+\}$. Por el lema 3.6 es suficiente probar lo siguiente:
Para todo $\zeta < \lambda^+$ el tipo p_{i_ζ} no rompe sobre M_{i_0} y si $\zeta_1 < \zeta_2 < \lambda^+$, entonces $p_{i_{\zeta_1}} \subseteq p_{i_{\zeta_2}}$. En efecto, como $\delta \in S^{***}$, entonces p_δ no rompe sobre $B \subseteq M_{i_0}$ por la monotocidad, se tiene que p_δ no rompe sobre M_{i_0} . Sean $\delta_1 < \delta_2 \in S^{***}$. Si $p_{\delta_1} \nsubseteq p_{\delta_2}$, entonces existen

$$\varphi(x, b) \in p_{\delta_1} \text{ tal que } \neg\varphi(x, b) \in p_{\delta_2} \ (\dagger)$$

Como $\delta_2 > i_0$ por la condición 5, existe $b' \in M_{i_0}$ tal que

$$tp(b/M_{i_0}) = tp(b'/M_{i_0}) \ (\dagger\dagger)$$

Como p_{δ_1} y p_{δ_1} no rompen sobre M_{i_0} de † y †† se obtiene

$$\varphi(x, b') \in p_{\delta_1} \text{ y } \neg\varphi(x, b') \in p_{\delta_2} \ (\dagger\dagger\dagger)$$

pero († † †) contradice que para $\delta_1, \delta_2 \in S^{**}$ tenemos $p_{\delta_1}|M_{i_0} = p_{\delta_2}|M_{i_0}$ □

Definición 3.0.14 *Sea λ ser un cardinal. Un bloque de λ es un subconjunto finito de λ. Para dos bloques u_1, u_2 de λ decimos que $u_1 < u_2$ si $max\{u_1\} < max\{u_2\}$.*

Teorema 3.0.10 *Sea $p \in S_\Delta(A)$ un tipo estable mínimo ancho, y sea $I = \langle a_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$ una sucesión de Morley en p. Entonces*

1. *I es un conjunto indiscernible sobre A*

2. *Sea u_i, son bloques mutuamente disyunto de λ para $i < \omega$ y $b_i \in \Sigma_{\alpha \in u_i} \mathbb{R} a_\alpha$ con $||b_i|| = 1$. Entonces $J = \langle b_i | i < \omega \rangle$ es un conjunto indiscernible sobre A y una secuencia de Morley en p.*

Demostración:

1. Por la observación que sigue a la definición 3.0.10, y tomando a $p \in S(acl(A))$, entonces existe un único $q \supseteq p$ tal que q no bifurca sobre $acl(A)$, por tanto $a_\alpha \models q|A_{<\alpha}$ lo cual indica que existe una única forma de construir $\langle a_\alpha : \alpha < \lambda \rangle = I$. Por otro lado, por la primera parte de 3.0.3, I es un conjunto indiscernible. Por tanto, por el hecho 3.0.2, se tiene que I es un conjunto indiscernible sobre A:

2. Sea $p_\alpha = tp(a_\alpha / Aa_{<\alpha})$. Fijemos $\alpha < \lambda$. Observe que $p_{\alpha+1}$ es un tipo ancho, extensión de p_α. En efecto, es claro que $p_{\alpha+1}$ es una extensión de p_α; por otro lado por ser $\langle a_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$ sucesión de Morley, se tiene que $p_{\alpha+1} = tp(a_{\alpha+1} / Aa_{<\alpha+1})$ no bifurca sobre A, es decir que para todo $\varphi(x, a) \in p_{\alpha+1}$ y $\epsilon > 0$ existe una formula $\phi_\varphi(x)$, con $dom(\phi_\varphi) \subseteq acl(A)$ y tal $||\varphi(x, a) - \phi_\varphi(x)||^{\mathfrak{C}} < \epsilon$, ahora como p es ancho existe B subconjunto de dimensión infinita, cuya esfera unidad esta contenida en $p(\mathfrak{C})$, por lo tanto se tiene que $p_{\alpha+1}$ determina todas las fórmulas para los valores de B, por lo tanto resulta que $B \subseteq p_{\alpha+1}(\mathfrak{C})$. Por lo tanto, es ancho.
   Supongamos que $a_\alpha \in S_1(B)$. Así tenemos para todo $a' \in S(B)$, se tiene que $\mathbb{R} a_\alpha + \mathbb{R} a' \subseteq B$. Si $r, r' \in \mathbb{R}$ tales que $||r + r'||_2 = 1$, entonces para todo $a' \in s(B)$ tenemos

   $$ra_\alpha + r'a' \in S_1(H)$$

   Si definimos

   $$\pi(x) = \{p_\alpha(ra_\alpha + r'x) : r, r' \in \mathbb{R}, r^2 + (r')^2 = 1\}$$

   resulta entonces que $\pi(x)$ es un tipo parcial ancho sobre $Aa_{\leq\alpha}$. En virtud de 3.0.7, existe un tipo completo $p\prime$ ancho sobre $Aa_{\leq\alpha}$ extensión de π. Como p' extiende a p_α, por minimalidad se tiene que $p' = p_{\alpha+1}$. Por lo que resulta que $a_{\alpha+1} \models p'$. Por lo tanto $ra_\alpha + r'a_{\alpha+1} \models p_\alpha$. Por la indiscernibilidad resulta entonces que para $\beta > \gamma \geq \alpha$ y $r, r' \in \mathbb{R}$ con $||r + r'||_2 = 1$ se tiene que $ra_\gamma + r'a_\beta \models p_\alpha$. Por tanto $ra_\gamma + r'a_\beta \models tp(a_\alpha / Aa_\alpha)$, siendo I un conjunto indiscernible, por la parte 1 de este teorema, se tiene

que I es un conjunto indiscernible sobre A, por tanto para cualquier $\beta < \gamma \geq \alpha$ y r, r' con $||r + r'||_2 = 1$, tenemos que $ra_\gamma + r'a_\beta \models tp(a_\alpha/Aa_{<\alpha}a\!> \beta) = tp(A_\gamma/Aa_{<\alpha}a\!> \beta) = tp(a_\beta/Aa_{<\alpha}a\!> \beta)$. Haciendo $a' = ra_\gamma + r'a_\beta$, tenemos que $I' = a_{<\alpha}\frown a'\frown a > \beta$ es una sucesión de Morley.
Supongamos que $a' = \sum_{i<n} r_i a_{\alpha_i} + r_n a_{\alpha_n}$ tal que $\sum_{i\leq n} r_i^2 = 1$. Sean $r'' = ||\sum_{i\leq n} r_i a_{\alpha_i}||$ y $a'' = \frac{1}{r''}\sum_{i<n} r_i a_{\alpha_i}$. La sucesión

$$I'' = a_{<\alpha_0}\frown a''\frown a_{\alpha_n}\frown a_{>\alpha_n}$$

es una secuencia de Morley en p. Por lo expuesto en el punto de 2 de éste teorema se tiene que $I' = a_{<\alpha_0}\frown(r''a'' + r_n a_{\alpha_n})\frown a_{>\alpha_n}$. Para el caso general basta hacer inducción sobre el número de bloques. □

Teorema 3.0.11 *Sea $p \in S_\Delta(A)$ un tipo estable mínimo ancho, y sea $I = \langle a_\alpha : \alpha < \lambda\rangle$ una sucesión de Morley en p. Entonces I es isométrico a la base estándar de l_2. En otras palabras, para todo $k < \omega$ y $\lambda_0, \cdots, \lambda_{k-1} \in \mathbb{R}$ tenemos*

$$\left\|\sum_{i<k} \lambda_i a_i\right\|^2 = \sum_{i<k} |\lambda_i|^2$$

Demostración: En virtud del corolario 3.0.1 existe I' base isométrica a la base estándar de l_2, tal que $I' \subseteq P(\mathfrak{C})$. Por la segunda parte del hecho 3.0.3, (y puesto que p es estable), se tiene que existe $I \subseteq I'$ indiscernible sobre A. Como $I \subseteq I'$, se tiene entonces I es isométrico a la base estándar de l_2. Se demostrara que I es una sucesión de Morley sobre A. Sea H el espacio generado por I. Como $S_\Delta(A) \subseteq S_\Delta(acl(A))$, podemos suponer sin perdida de generalidad que $A = acl(A)$. Como p es un tipo estable, por la observación que sigue a la definición 3.0.10, se tiene entonces que p es estacionario. Por lo tanto existe único, salvo isomorfismo, tipo $p^* \supseteq p$ el cual no bifurca sobre $Dom(p)$. Sea $\langle a_i : i < \omega\rangle = I$. Sea $H_0 = \langle Aa_0\rangle$ el sub-espacio de H generado por Aa_0. El conjunto conjunto ortogonal a H_0, esto es, $H_0^\perp$, el cual es un espacio de Hilbert de dimensión infinita satisface el siguiente tipo

$$\pi(x) = p(x) \cup \{||\lambda_0 a_0 + \lambda x||^2 = \lambda_0^2 + \lambda^2 : \lambda_0, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Por lo que resulta que $\pi(x)$ es ancho.Por el teorema 3.0.2, existe $q \in S(Aa_0)$ extensión de $\pi(x)$, el cual es ancho. Es claro que $q(x)$ es una extensión de $p(x)$, por la minimalidad de p se tiene que $q = p^*|Aa_0$. Sea $b_1 \models q$ y $b_0 = A_0$, entonces $\langle b_0, b_1\rangle$ es una sucesión de Morley para p. Supongamos ahora que $\langle b_i : i \in \omega\rangle$ es una sucesión de Morley para p, que contiene, por supuesto, como primeros elementos a b_0, b_1. Se mostrara por inducción sobre n que $\langle b_i : i \in n\rangle$ es isométrico a la base estándar de un $n-$dimensional espacio de Hilbert.Consideremos por tanto $\langle b_i : i \in n\rangle$ isometría a un $n-$dimensional base de un espacio de Hilbert. Sea $\langle \lambda_i : i < \lambda < n+1\rangle$ una sucesión de números reales. Por tanto, por la hipótesis inductiva se tiene que

$$\left\| \sum_{i<n} \lambda_i b_i \right\|^2 = \sum_{i<n} \lambda_i^2$$

Denotemos por $\lambda' = \sqrt{\sum_{i<n} \lambda_i^2}$ y $b' = \sum_{i<n} \lambda_i b_i$. Por el teorema 3.0.10, se tiene que $\langle b', b_n \rangle$ es una sucesión de Morley en p. Y por la hipótesis inductiva

$$\left\| \sum_{i<n+1} \lambda_i b_i \right\|^2 = ||\lambda' b' + \lambda_n b_n||^2 = (\lambda')^2 + \lambda_n^2 = \sum_{i<n} \lambda_i^2 + \lambda_n^2 = \sum_{i<n+1} \lambda_i^2$$

Por lo que queda completada la inducción. Lo anterior demuestra que existe una sucesión $I_0 = \langle b_i : i < \omega \rangle$ que es sucesión de Morley para p y es isométrica a la base estándar del espacio de Hilbert de dimensión n. Dada una sucesión I de Morley de p entonces existe una inmersión elemental de I_0 en I, definida por la isomorfía parcial que define cada indiscernible. $\square$

Capítulo 4

Conclusiones

4.1. Teorema central

En esta sección discutiremos las consecuencias de los resultados obtenidos en los dos últimos capítulos. Para discutir el teorema principal 4.1.4, es necesario tener una versión del teorema de Morley para la lógica de primer orden continua. Otro resultado de la teoría de modelos de LPO, afirma que para una T teoría ω_1-categórica, existen modelos primos. Los siguientes tres resultados son los equivalentes en la lógica continua . Primero, definimos que es ser modelo primo.

Definición 4.1.1 *Sea $M \in \mathcal{K}$, $A \subseteq M$. Se dice que M es primo sobre A si dado N tal que $A \subseteq N \in \mathcal{K}$, existe una inmersión elemental $f : M \to N$, de forma que $F|_A = id_A$.*

Teorema 4.1.1 *Sea $\mathcal{K}$ clase elemental de espacios de Banach $\lambda-$categórico, con $\lambda > \omega$. Dado $A \subseteq \mathfrak{C}$. Entonces existe un modelo $M \in \mathcal{K}$ el cual es primo sobre A.*

Este teorema nos garantiza, siempre que $\mathcal{K}$ es categórico no contable, la existencia de modelos en $\mathcal{K}$ sobre cualquier subconjunto del monstruo. Visto desde el análisis, se puede entender como el espacio de Banach el cual esta isometricamente inmerso en todo espacio de Banach de la clase $\mathcal{K}$.

Teorema 4.1.2 *Suponga que $\mathcal{K}$ es una clase elemental de espacios de Banach $\lambda-$categórico, con $\lambda > \omega$. Entonces $\mathcal{K}$ es $\aleph_0-$estable.*

Teorema 4.1.3 *Teorema de Morley para la lógica continua Suponga que $\mathcal{K}$ es $\lambda-$categórica con $\lambda > \omega$. Entonces $\mathcal{K}$ es categórica para todo carácter de densidad no contable. Más aun, todo modelo no separable en $\mathcal{K}$ es saturado.*

Los dos últimos teoremas son los análogos al teorema de Morley en la lógica continua.
El teorema siguiente reúne todos estos resultados, junto con los dos últimos capítulos.

Teorema 4.1.4 *Sea $\mathcal{K}$ una clase elemental de espacios de Banach, con estructura de espacio vectorial, definido sobre un lenguaje contable. Si $\mathcal{K}$ es $\lambda-$categórico para $\lambda > \omega$, entonces existe un modelo separable M_0 de T y un tipo ancho p sobre M_0 tal que*

1. *Toda sucesión de Morley en p es isométrico a la base ortonormal estándar de un espacio de Hilbert.*

2. *Si M es un modelo de T de carácter de densidad no contable λ, entonces M es primo sobre una sucesión de Morley en p de longitud λ.*

Demostración Por el teorema 4.1.1, existe $\hat{M}_0$ modelo primo en $\mathcal{K}$ sobre ϕ. Por el teorema de existencia de tipos anchos teorema 2.0.2, existe un tipo ancho $\hat{p}_0$ sobre $\hat{M}_0$. Por el teorema 4.1.2, $\mathcal{K}$ es estable, en particular el tipo $\hat{p}_0$ es estable. Por el teorema 2.0.7, existe un modelo separable $M_0 \in \mathcal{K}$, $\hat{M}_0 \prec M_0$, y un tipo ancho minimal p_0 extensión de $\hat{p}_0$ sobre M_0. Sea $M \in \mathcal{K}$ con carácter de densidad λ. Por el teorema 4.1.3, M es $\lambda-$saturado, así que podemos asumir que $M_0 \subset M$. Como M es saturado existe $a_\kappa \models tp(x/Aa_{<\kappa})$,esto permite definir en $I = \langle a_i | i \leq \lambda \rangle$ de la siguiente forma, para Por saturación existe una sucesión de Morley $I = \langle a_i | i \leq \lambda \rangle$ en p_0, $I \subseteq M$. Sea M' un modelo primo sobre I (teorema 4.1.1). Entonces M' tiene carácter de densidad λ; como $\mathcal{K}$ es $\lambda-$categórico por el teorema 4.1.3, M' es isométrico a M. Entonces M es primo sobre una sucesión isométrica a una secuencia de Morley en p_0. La conclusión se sigue de la proposición 4.11. □

En la siguiente figura se reúne todos los elementos de la prueba del teorema anterior. El diagrama lo estructura la prueba anterior. Leyendo la prueba, se entiende a lo que hace referencia cada uno de los elementos dentro del diagrama. Se recomienda leer primero el teorema para fijar ideas acerca de la existencia de los modelos primos y de los tipos anchos minimales.

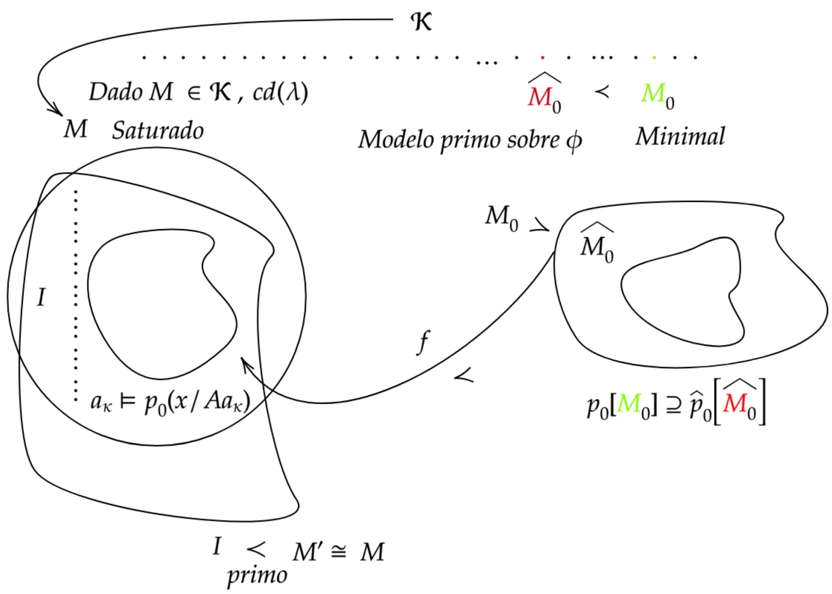

Figura 4-1: Diagrama de la demostración

Por otro lado, el diagrama sugiere una aproximación de lo que se decía en la introducción acerca de los conjuntos fuertemente minimales. La existencia del conjunto de indiscernibles tipo Morley, se comporta como indiscernibles en el caso de la LPO. El modelo que resulta ser primo sobre dicho sucesión de Morley es el modelo que satisface los requisitos del teorema. Veamos hasta que punto el conjunto de realizaciones de un tipo ancho es un conjunto fuertemente minimal. El conjunto de realizaciones de un tipo ancho $\pi(x)$ tendrá que tener la propiedad que cualquier otra función uniformemente continua definida en el espacio $\varphi^{\mathfrak{m}}(x)$, tenga como elementos en común finitos elementos, esto es, $\varphi^{\mathfrak{M}}(\mathfrak{C}) \cap \pi(\mathfrak{C})$ es finito. Por tanto, $\varphi^{\mathfrak{M}}(\mathfrak{C}) \cap \pi(\mathfrak{C})$ es un conjunto de puntos aislados, como $\pi(\mathfrak{C})$ es tipo ancho, existe F subespacio de Banach de dimensión infinita tal que la esfera unidad del espacios F, esta contenido en el conjunto de realizaciones de $\pi(x)$, asi que $S_1(F) \subseteq \pi(\mathfrak{C})$. Por lo que el conjunto de realizaciones de $\varphi^{\mathfrak{M}}(x)$ deben estar contenidos en $\mathfrak{C} \backslash \pi(\mathfrak{C})$, y por tanto $\mathfrak{C} \backslash \pi(\mathfrak{C})$ tiene puntos aislados. Así que por cada L-fórmula $\varphi(x)$ se tiene un conjunto $\gamma_\varphi \subseteq \mathfrak{C} \backslash \pi(\mathfrak{C})$. La métrica debe distinguir a los elementos aislados de los elementos en que están en la clausura de cierto conjunto $A \supseteq \pi(\mathfrak{C})$. Queda con esto dicho que los tipos anchos no se ajustan por si solo a los conjuntos fuertemente minimales, en el sentido en que la métrica debe garantizar parte de la labor.

Capítulo 5

Capítulo ...

Se deben incluir tantos capítulos como se requieran; sin embargo, se recomienda que la tesis o trabajo de investigación tenga un mínimo 3 capítulos y máximo de 6 capítulos (incluyendo las conclusiones).

Bibliografía

[1] BENYAMINI, Yoav ; LINDENSTRAUSS, Joram: *Geometric nonlinear functional analysis.* Vol. 48. American Mathematical Soc., 1998

[2] C. HENSON, J I.: Ultraproducts in analysis. In Analysis and logic. En: *London Math. Soc. Lecture* 262, year=2002, pages=1-110

[3] HENSON, C.: Nonstandard hulls of Banach spaces. En: *Israel Journal of mathematics* 25, year=1976, pages=108-144

[4] I. BEN YAACOV, C. H. ; USVYATSOV, A.: Model theory for metric structures. In Model Theory with Applications to Algebra and Analysis. En: *volume 350 of Lecture Notes series of the London Mathematical Society*, 2008, p. 315–428

[5] KATRIN TENT, Martin Z.: *A Course in Model Theory.* Cambridge University Press, 2012 (Lecture Notes in Logic). – ISBN 052176324X,9780521763240

[6] MARKER, David: *Model theory: an introduction.* 1. Springer, 2002 (Graduate texts in mathematics 217)

[7] S. SHELAH, A. U. *Minnimal types in stable Banach spaces*

[8] S. SHELAH, A. U.: Model theoretic stability and categoricity for complete metric spaces. En: *Israel J. Math.* 182, year=2011, pages=157-198

[9] SHELAH, S.: Every two elementarily equivalent models have isomorphic ultrapowers. En: *israel Journal of mathematics* 10 (1971), p. 114–133

[10] T. ABUABARA, J. L.: *Elementos de análisis funcional.* Bogotá : Universidad de los Andes, 2010

[11] YAACOV, I. B.: Uncountable dense categoricity in cats. En: *J. Symbolic Logic* 70, year=2005, pages=829-860